① Некоторые математические модели, описываемые ур-ями в частных производных.

Лыжов
401

1) колебания мембраны

мембрана ≡ упругая ~~пл.~~ поверхность; колеблется при внеш. возд. (в покое — плоская D)

~~потенц. энергия ~ приращению площади~~

①

ρ — поверхностная плотность

T_K — кинетическая энергия

T_p — потенциальная энергия

$u = u(x,y,t)$ — отклонение (прогиб) мембраны

K — коэф-т натяжения

$\sigma(t)$ площадь мембраны в момент времени t;

$$\boxed{\sigma(t) = \int_D \sqrt{1+u_x^2+u_y^2}\,dxdy}$$

площадь в полож. покоя:

$$|D| = \int_D dxdy$$

Предположения:

- $u = u(x,y,t)$ — дост. гладкая функция
- колебания мембраны малы — пренебр. степенями ~~величин~~ u, u_x, u_y, u_t выше вторых. ⇒Тейлор • $u_x^2, u_y^2 << 1$

$$\boxed{T_K = \int_D \rho \frac{u_t^2}{2}\,d\sigma} \; ; \; T_p \overset{=K\Delta\sigma}{=} \left(\int_D K\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}\,d\sigma - \int_D K\,d\sigma\right) \approx$$

$$\approx \left(\int_D K\left(1+\frac{1}{2}u_x^2+\frac{1}{2}u_y^2\right)d\sigma - \int_D K\,d\sigma\right)$$

② ~~Будем считать, $u_x^2 + u_y^2 << 1$, т.е. деформации невелики~~

$$\Rightarrow \boxed{T_p = \int_D \frac{K}{2}\left(u_x^2+u_y^2\right)d\sigma}$$

Пусть (t_1, t_2) — промежуток времени наблюдения.

Принцип Гамильтона ⇒ $E(u) = \boxed{\int_{t_1}^{t_2}(T_K - T_p)\,dt} = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} dt \int_D [\rho u_t^2 - K(u_x^2+u_y^2)]\,dxdy$ ③ $E = \iiint \underbrace{\mathcal{L}(u)}_{\text{лагранжиан}}\,dt\,dx\,dy$

$u(x,y,t)$ дает стац. знач-е $\int$

~~[illegible] ⇒ $u(x,y,t)$ — реш-е ур-я Эйлера~~

~~соответствующей вариац. задачи~~

$$\boxed{\text{Э-Л} \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_t) - \frac{\partial}{\partial x}(K u_x) - \frac{\partial}{\partial y}(K u_y) = 0 \quad ④ \Rightarrow \rho u_{tt} = K(u_{xx}+u_{yy})}$$

При предположении: u им. 2ые производные в обл-ти D, $\rho, K = \mathrm{const}$ ⇒ $\rho u_{tt} = K(u_{xx}+u_{yy})$ ⇒

(∃$u_t \Rightarrow \Delta u \Rightarrow$ – Э-Л
для $D(u)=\int u_x^2+u_y^2\,dx\,dy$
инт. Дир., получ. из $E(u)$)

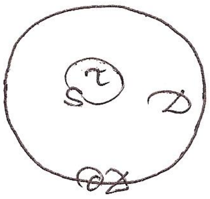
⇒

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2\Delta u, \text{ где } a^2=k/\rho \\ u|_S=0 \text{ – край закреплён} \\ u|_{t=0}=\varphi(x,y),\ u_t|_{t=0}=\psi(x,y) \text{ – нач. усл-я} \end{cases}$$

[имеет смысл и трёхмерная задача: $u_{tt}=\Delta u$, $\dim x=3$]

2) <u>распространение тепла</u>

~~Зн~~ в среде, заполненной массой:



- удельной теплоёмкостью c
- плотностью ρ
- коэффициентом теплопр-ти k

D, S ①

$u(x,t)$ – температура среды

$$\int_{t_1}^{t_2}dt\int_S k\frac{\partial u}{\partial n}\,ds$$ – количество тепла, поступающего в D через S за время (t_1,t_2) ② зак. Фурье

$u(x,t+dt)-u(x,t)\approx u_t\,dt$ – приращение температуры в рез-те поступление тепла

⇒ ⇒ ур-е баланса тепла: $$\int_{t_1}^{t_2}dt\int_S k\frac{\partial u}{\partial n}\,ds=\boxed{\int_{t_1}^{t_2}\int_D c\rho u_t\,d\tau\,dt}\ (*)$$ ③ ~~τ – элемент объёма~~

$\bar{n}$ – внешняя нормаль к S

(grad из опр-я $\frac{\partial}{\partial n}$)

По ф. Гаусса-Остроградского $$k\int_{t_1}^{t_2}dt\int_\tau \operatorname{div}(\operatorname{grad}u)\,d\tau=\int_{t_1}^{t_2}dt\int_\tau c\rho u_t\,d\tau$$

При $c,k,\rho=\text{const}$, ввиду произв-ти пром-ка времени (t_1,t_2) и объёма области D ⇒ $c\rho u_t-k\Delta u=0$ ④ ⇒ $\underline{u_t=a^2\Delta u}$, где $a=\frac{k}{c\rho}$.

$$\left.\begin{aligned} &u|_S=f(x),\\ &\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S=\psi(x),\\ &\alpha\frac{\partial u}{\partial n}+\beta u\Big|_S=h(x,t) \end{aligned}\right\}$$ – возможные кр. усл-я

~~$(*)$: $\int_S \frac{du}{dn}\,ds=\int_S(\operatorname{grad}u,n)\,dS=\int_\tau \operatorname{div}(\operatorname{grad}u)\,d\tau$~~ ↑ О-Г

~~Исключая u и v из (21), на основании (20) находим~~

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} = 0. \tag{22}$$

~~Когда сплошная среда находится в статическом напряженном состоянии, главный вектор и главный момент всех действующих в ней сил должны быть равны нулю. Выполнение первого из этих требований даёт три уравнения равновесия~~

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + X = 0,$$
$$\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + Y = 0, \quad \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + Z = 0, \tag{23}$$

~~а выполнение второго показывает, что $X_y = Y_x$, $X_z = Z_x$, $Y_z = Z_y$. Последние равенства означают, что тензор напряжения симметричен~~

~~В случае плоской деформации, при отсутствии объёмных сил из системы (23) получается система (22). Следовательно, для определения пяти величин $X_x, X_y = Y_x, Y_y, u, v$, характеризующих плоское напряженное состояние упругого тела, имеем систему пяти уравнений (21), (22).~~

§ 6. Основные уравнения гидромеханики

На каждой мысленно выделенной поверхности σ в объёме жидкости, действует давление. Когда давление направлено вдоль нормали к элементу $d\sigma$ площади σ, говорят, что имеет место закон изотропности давления.

равнов => ✓

{ движ ✓ => идеальная

{ движ / трение × => реал

{ внутр / внеш

~~Этот закон всегда верен, если жидкость находится в равновесном состоянии. Когда указанный закон верен и для движущейся жидкости, то такая жидкость называется идеальной.~~

В жидкости выделим произвольно малый объём τ - "частицу жидкости". Заполняющей объём жидкости τ приписывается определённая , средняя скорость, предел которой при стягивании

p, ρ, q — движения

$\mathcal{T}$ в точку $\mathcal{P}$ называется скоростью q жидкости в точке $\mathcal{P}$. ~~Она очевидно является вектором. Обозначим через x_1, x_2, x_3 декартовы ортогональные координаты точки $\mathcal{P}$, а через q_1, q_2, q_3 компоненты вектора q в точке $\mathcal{P}$. Движение или равновесное состояние жидкости определено, если нам известны в каждой точке $\mathcal{P}(x_1, x_2, x_3)$ давление p, плотность распределения масс ρ и вектор скорости q.~~

Линия в занятом жидкостью объёме, касательная которой в каждой точке $\mathcal{P}$ параллельна вектору скорости q в этой точке, называется линией тока. Её уравнением служит равенство

$$\frac{dx}{dt} = q,$$

где x – радиус-вектор точки $\mathcal{P}$.

Когда плотность ρ постоянна во всем объёме, занятом жидкостью, такая жидкость называется несжимаемой.

~~При наличии трения (внутреннего, между частицами жидкости, или внешнего, между частицами жидкости и твердым телом, находящимся с ними в контакте) закон изотропности давления в движущейся жидкости может не иметь места. В таком случае жидкость называется реальной.~~

Внутреннее трение является причиной появления позади движущегося в реальной жидкости твёрдого тела вихрей, сопротивления и подъёмной силы. Они сразу исчезают при наступлении равновесного состояния. Этот факт находится в тесной связи с тем, что внутреннее трение может проявляться в сопротивлении изменению формы жидкости. Когда при изучении движения жидкости нельзя игнорировать внутреннее трение, жидкость называется вязкой.

Если скорость q в каждой точке движущейся жидкости не зависит от времени, то движение называется стационарным.

В гидромеханике в самом общем случае при предположении, что объёмные силы и термальные явления отсутствуют, для определения величин q, p и ϱ имеется система уравнений, состоящая из векторного уравнения Навье-Стокса

$$\boxed{\varrho \frac{\mathcal{D}q}{\mathcal{D}t} + \mathrm{grad}\, p = \mu \Delta q} \qquad (24)$$

и скалярного уравнения неразрывности

$$\boxed{\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathrm{div}\, \varrho q = 0,} \qquad (25)$$

где дифференциальные операторы grad, div, $\Delta = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}$ берутся по пространственным переменным x_1, x_2, x_3, $\frac{\mathcal{D}q}{\mathcal{D}t}$ — так называемая субстанциональная производная по времени

$$\frac{\mathcal{D}q}{\mathcal{D}t} = \frac{\partial q}{\partial t} + q\cdot\mathrm{grad}, \quad q\cdot\mathrm{grad} = q_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + q_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + q_3 \frac{\partial}{\partial x_3}, \qquad (26)$$

а μ - коэффициент вязкости.

К системе (24), (25) четырёх уравнений добавляется пятое, конечное уравнение состояния

$$\boxed{p = p(\varrho).} \qquad (27)$$

В случае так называемой баротропной жидкости зависимость (27) монотонна.

Если через $q^2 = qq$ обозначим скалярное произведение вектора q на себя, а через $\Omega \times q$ - векторное произведение векторов $\Omega = \mathrm{rot}\, q$ и q, то в силу (26) уравнению (24) можно придать вид

$$\varrho \frac{\partial q}{\partial t} + \varrho \left[\frac{1}{2} \mathrm{grad}\, q^2 + \Omega \times q \right] + \mathrm{grad}\, p = \mu \Delta q \,. \qquad (28)$$

Вектор Ω называется вихрем скорости q. Движение жидкости называется вихревым или безвихревым в зависимости от того $\Omega \neq 0$ или $\Omega = 0$ всюду в объёме, занятом жидкостью.

В случае стационарного движения жидкости уравнения (28) и (25) переходят соответственно в уравнения] Стац => $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ①

$$\rho\left[\frac{1}{2}\,\mathrm{grad}\,q^2 + \Omega\times q\right] + \mathrm{grad}\,p = \mu\Delta q\,, \qquad (29)$$

$$\mathrm{div}\,\rho q = 0. \qquad (30)$$

Для безвихревого движения характерным является отсутствие слагаемого $\rho\Omega\times q$ в уравнении (28). При отсутствии вихря и вязкости вместо (29) будем иметь] $\Omega = 0$

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{grad}\,q^2 + \rho\,\mathrm{grad}\,p = 0.$$

Система уравнений (29),(30) нелинейна. Когда величина ② $\mathrm{grad}\,q^2 + 2\Omega\times q$ пренебрежимо мала, и ③ $\rho = Const$, вместо (29),(30) при изучении стационарного движения жидкости можно ограничиться рассмотрением линейной системы

$$\Delta q - \frac{1}{\mu}\,\mathrm{grad}\,p = 0\,, \qquad \mathrm{div}\,q = 0.$$

Заметим, что уравнение неразрывности (25) представляет собой дифференциальную запись допущения, что в движущейся жидкост нет источников и стоков, т.е. в объёме, занятом жидкостью, не происходит ни потери, ни возникновения ее массы. Что же касаетс уравнения (28), его проще всего вывести из принципа Даламбера, по которому в каждый момент движения любой сплошной среды все приложенные к ней силы – объёмные, поверхностные, включая и силы инерции,взаимно уравновешиваются.

Если существует семейство параллельных плоскостей, в которых при пересечении с объёмом, занятым движущейся жидкостью, гидромеханическая картина одинакова, то такое движение называется плоскопараллельным. Поскольку в этом случае вектор скорости q параллелен плоскости движения, при подходящем подборе системы координат его можно считать двухкомпонентным.

Нач и гр усл: напр, $\begin{cases} \overline{V}\big|_S = 0 \\ \overline{V}\big|_{t=0} = \overline{V_0} \end{cases}$

② Основные уравнения в ЧП и задачи, корректно поставленные для них.

1) задача Дирихле (первая кр. задача) [для ур-я Лапласа]

Пусть обл-ть Ⓓ $\subset E_n$, Ⓢ - граница - $(n-1)$-ая гиперпов-ть.

Задача: опред-ть регулярное① (=непр с ЧП) в (внутри) обл-ти D (т.к. опр. на 2D) реш-е $u(x)$ ур-я

$$\boxed{\Delta u = 0} \text{ - ур-е Лапласа},$$

непрерывное② в $D \cup S$ (- замкн. область) и удовл. кр-усл-ю:

$$③ \lim_{x \to y} u(x) = \varphi(y),\ x \in D,\ y \in S, \text{ где}$$

φ - известная, непрерывная, действ. ф-я на S.

2) задача Коши (=без кр. ус.) [для волнового уравнения].

Пусть $G \subset E_{n-1}$, $x = (x_1 \dots x_{n-1})$.

Задача: определить регулярное① в обл-ти G реш-е $u(x)$ ур-я

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0} \text{ - волновое ур-е},$$

при начальных усл-ях:

$$② u(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = \varphi(x),\quad \left.\frac{\partial u(x_1 \dots x_n)}{\partial x_n}\right|_{x_n = 0} = \psi(x),\ x \in G,$$

где φ, ψ - изв., дост. гладкие, действ. в G ф-ции.

3) первая кр. задача [для ур-е теплопроводности]

Пусть $D \subset E_n$, D - ограничена:

- цилиндрической пов-тью с образующими, паралл. ~~[illegible]~~ оси x_n
- двумя плоскостями $x_n = 0$, $x_n = h$, $h > 0$.

S = часть границы ~~∂~~ D без верхнего основания $x_n = h$.

Задача: определить регулярное① в обл-ти D реш-е $u(x)$ ур-я

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0} \text{ [}\leftarrow\text{ур-е теплопроводности при } n=4\text{]},$$

удовл. кр. усл-ю: $② \lim_{x \to y} u(x) = \varphi(y)$, $y \in S$, $x \in D$,

где φ - изв., дост. гладкая, действ. ф-я на S.

[Регулярное решение ≡ реш-е, им. в обл-ти непрерывные частн. производные].

Корректность постановки:

- единственность решения [$\exists + !$]
- малому изменению нач. данных и пр. части соотв-ет малое изменение реш-е задачи. [уст-ть]

2) корректность пост-ки з. Коши [для волн. ур-я].

$\boxed{\text{Т:}}$ Задача Коши для волн. ур-я [как однородн., так и неоднор.] не может иметь более одного решения.

Док-во: Для простоты, ∡ $x_1 = x$ — одно простр. измерение. Пусть $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ — реш-е з. Коши для ур-я

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -g(x,t) \Rightarrow u_1(x,t) - u_2(x,t) = u(x,t)$ — реш-е ур-я колебание струны: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$, удовл. нач. условиям:

$$u(x,0) = 0,\ \frac{\partial}{\partial t} u(x,t)\Big|_{t=0} = 0.$$

Покажем, что ↑ не может иметь ≠ 0 реш-е, удовл. усл-ям ↑.

Исп. тождество: $-2\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = -2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 = 0.$

Интегрируем тождество по Δ-ной обл-ти с вершинами: т. $A(x-t,0)$, $B(x+t,0)$, $C(x,t)$ + исп. ф. Гаусса-Остроградского:

$$\Rightarrow \int\limits_{\Delta}\left[-2\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial u}{\partial\tau}\right) + \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial u}{\partial\tau}\right)^2\right] d\xi\, d\tau =$$

$$= \int\limits_{AB+BC+CA} -2\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial u}{\partial\tau}\, d\tau - \left[\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial\tau}\right)^2\right] d\xi = 0 \ \circledR{\Rightarrow}$$

В силу нач. усл-й $\Rightarrow$ вдоль AB: $\frac{\partial u}{\partial\xi} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial\tau} = 0$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{ур-е } BC:\ \xi = -\tau + x + t,\\ \text{ур-е } CA:\ \xi = \tau + x - t\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} d\xi = -d\tau \text{ — вдоль } BC,\\ d\xi = d\tau \text{ — вдоль } CA.\end{array}\right.$$

$$\circledR{\Rightarrow} \int\limits_{BC}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi} - \frac{\partial u}{\partial\tau}\right)^2 d\tau - \int\limits_{CA}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi} + \frac{\partial u}{\partial\tau}\right)^2 d\tau = 0.$$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^t\left(\frac{\partial u}{\partial\xi} - \frac{\partial u}{\partial\tau}\right)^2 d\tau + \int_0^t\left(\frac{\partial u}{\partial\xi} + \frac{\partial u}{\partial\tau}\right)^2 d\tau = 0.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} - \dfrac{\partial u}{\partial \tau} = 0, \text{ на } BC \\ \dfrac{\partial u}{\partial \xi} + \dfrac{\partial u}{\partial \tau} = 0, \text{ на } AC \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial \tau} = 0, \ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \text{ – в т. } C,$$

т.е. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0.$

Т.к. т. C выбрана произвольно, то $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$ для ∀ т. на плоскости (x,t), т.е. $u(x,t) = const$
нач. усл-е: $u(x,0) = 0$ $\Big\} \Rightarrow u(x,t) = 0$ всюду.

[для неоднородн. ур-е нач. усл-е: $u_1(x,0) = \varphi(x)$, $\dfrac{\partial}{\partial t} u_1(x,t)\big|_{t=0} = \psi(x)$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ по ф. Даламбера строим $u_2(x,t)$ – реш-е однородн. ур-я, удовл. неодн. нач. усл-ем. Разность $u_1(x,t) - u_2(x,t) = u(x,t)$ – – реш-е неоднородн. ур-я, удовл. ~~не~~ однородн. нач. усл-ем].

$\boxed{\text{Т:}}$ Малому изменению начальных данных φ, ψ и прав. части g волн. ур-я соответствует малое изм-е реш-е задачи Коши.

<u>Док-во:</u> [на примере однородн. задачи Коши для неодн. ур-е]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -g(x,t), \quad (t>0 \text{ – без огр-е общности}). \\ u(x,0) = 0, \ \dfrac{\partial}{\partial t} u(x,t)\big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Пусть $g_1(x,t) - g_2(x,t) = g(x,t)$ – разн-ть пр. частей: $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = -g_1(x,t), \\ \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = -g_2(x,t). \end{cases}$

$|g(x,t)| < \varepsilon$

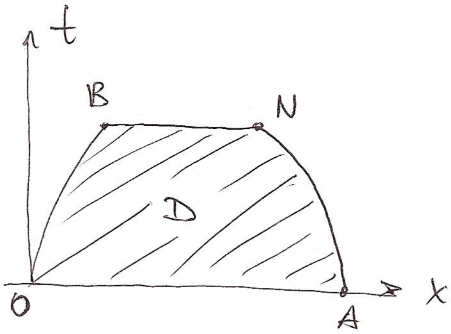
$\Rightarrow$ для разности решений $u_1(x,t) - u_2(x,t) = u(x,t)$ получаем:

$$|u(x,t)| = \frac{1}{2} \left| \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} g(\tau_1, \tau)\, d\tau_1 \right| < \varepsilon \int_0^{\tau} (t-\tau)\, d\tau = \frac{1}{2} \varepsilon t^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ малому изм-ю пр. части неодн. ур-е в обл-ти её задания соответствует малое изм-е реш-я з. Коши, если область ограничена по переменному t.

3) корректность постановки первой кр. задачи [для ур-я теплопроводности].

$\boxed{\text{Т:}}$ [принцип экстремума] Регулярное решение $u(x,t)$ ур-я $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$, непрерывное в DUSUBN ↓ своего экстремума достигает на S:



Док-во: [случай максимума]

Обозн. M – макс. $u(x,t)$ на замкн. $D \cup S \cup BN$. Пусть от противного $M \notin S$: $M=(x_0,t_0) \in$ $\in D \cup BN$, тогда:

∡ ф-ю $v(x,t)=u(x,t)+a(T-t)$, $\underline{a=\text{const}>0}$.

$0 \le t \le T \Rightarrow u(x,t) \le v(x,t) \le u(x,t)+aT$ в $D \cup S \cup BN$

Пусть M_u^S – макс. $u(x,t)$ на S, M_v^S – макс. $v(x,t)$ на S. По допущению, $M_u^S < M$. Подберём a, т.ч. $a<\dfrac{M-M_u^S}{T} \Rightarrow$

$\Rightarrow M_v^S \le M_u^S + aT < M_u^S + \dfrac{M-M_u^S}{T}T = M = u(x_0,t_0) \le v(x_0,t_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow v(x,t)$ не может достигать макс. на S $\Rightarrow$ макс. $M_v' = (x_1,t_1) \in$ $\in D \cup BN$.

1) если $(x_1,t_1) \in D$:

$M_v' = (x_1,t_1)$ – т. макс. $v(x,t)$ на $D \cup S \cup BN \Rightarrow \left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{M_v'} = 0$, $\left.\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right|_{M_v'} \le 0$,

т.е. $\dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \ge 0$

2) если $(x_1,t_1) \in BN$: (т.е. $t_1=T$)

$$\left.\begin{array}{l} M_v' = (x_1,t_1) \text{ – т. макс. } v(x,t) \text{ на } D \cup S \cup BN \Rightarrow \left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{M_v'} \ge 0 \\ (x_1,T) \text{ явл-ся т. макс-ма } v(x,t), \text{ как ф-ции } x \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \dfrac{\partial^2 v(x_1,T)}{\partial x_1^2} \le 0 \Rightarrow \left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{(x_1,T)} - \left.\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right|_{(x_1,T)} \ge 0 \\ \text{подставляем в } \uparrow \; v(x,t)=u(x,t)+a(T-t) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial t_1} - a - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ge 0$, $x=x_1, t=t_1$ $\leftarrow$ т.к. $u(x,t)$ – реш-е исходн. ур-я $\Rightarrow -a \ge 0$ ↯ т.к. $\underline{a>0}$.

[аналогично, для min-ма]

$\boxed{\text{Т:}}$ Регулярное решение $u(x,t)$ задачи $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$, непр. в обл-ти $D \cup S \cup BN$, удовл. усл-ям:

$u|_{OB} = \psi_1(t)$, $u|_{AN} = \psi_2(t)$, $u|_{OA} = \varphi(x)$,

$\psi_1(0) = \varphi(0)$, $\psi_2(A) = \varphi(A)$,

$\exists!$ и устойчиво.

Док-во: 1) Пусть $u_{1,2}(x,t)$ – регулярн. реш-я ур-я ↑, удовл. кр. условиям ↑ $\Rightarrow u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ – рег. решение ур-я ↑, обращ. в 0 на S $\Rightarrow$ {в силу принципа экстремума} $\boxed{\Rightarrow}$

$\Rightarrow u(x,t)=0$ в $D\cup S\cup B\cup N \Rightarrow \not\forall \Rightarrow$ реш-е !

2) Если $|u_1|_S - u_2|_S| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0 \Rightarrow$ {в силу пр. экстремума} $\Rightarrow$ $\Rightarrow |u_1(x,t) - u_2(x,t)| < \varepsilon$ всюду в $D\cup S\cup B\cup N \Rightarrow$ устойчивость

3) Пусть OB и AN – прямые : $O(0,0)$, $B(0,T)$, $A(\ell,0)$, $N(\ell,T)$, причём : $u(0,t)=0$, $u(\ell,t)=0$, $0\le t\le T$,

$u(x,0)=\varphi(x)$, $0\le x\le \ell$, $\varphi(x)$ – непр. дифф на $0\le x\le \ell$

$\varphi|_{x=0} = \varphi|_{x=\ell} = 0.$

$\varphi(x)$ на $0\le x\le\ell$ разложима в ряд Фурье :

$\varphi(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{\pi k}{\ell}x$ – абс. равномерно сх-ся, при $t>0$,

т.к. $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^m e^{-\frac{\pi^2k^2t}{\ell^2}} = 0$, $m=0,1,\ldots$

где $a_k = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^\ell \varphi(x)\sin\frac{\pi k}{\ell}x\,dx$, $k=1,2,\ldots$ – коэф-ты разложения

$\Rightarrow$ рег. реш-е ур-е Т : $u_k(x,t) = e^{-\pi^2k^2t/\ell^2}\sin\frac{\pi k}{\ell}x$,

удовл. кр. усл-ям : $u_k(0,t) = u_k(\ell,t) = 0$

$u_k(x,0) = \sin\frac{\pi k}{\ell}x$

$u(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\frac{\pi^2k^2t}{\ell^2}}\sin\frac{\pi k}{\ell}x$ – искомое реш-е $\Rightarrow$ реш-е $\exists$

[пример Адамара некорректно поставленной задачи]

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)\\ &u(x,0)=0;\ \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \nu(x) = \frac{\sin nx}{n} \quad (2)\end{aligned}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\sin nx}{h^2}\left(\frac{e^{hy}-e^{-hy}}{2}\right)'_y$$

$$= h e^{hy}\frac{\sin nx}{h^2} = \frac{e^{hy}}{n}\sin nx$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{y}\sin nx$$

рассм. $u(x,y) = \frac{\operatorname{sh} ny \sin nx}{n^2}$ – реш-е (1), удовл. (2).

└ т.о., для достаточно большого n ф-ю $\nu(x)$ можно сделать сколь угодно малой, в то время как соотв. реш-е з. Коши для ур-е (1) неограниченой^{sh} при $n\to\infty$ $\Rightarrow$ полученное решение неустойчиво $\Rightarrow$ данная задача НЕ является корректно поставленной.

③ Основные классификации УЧП и систем.

Пусть $D \subset E^n$, $x = (x_1 \dots x_n)$, $n \geq 2$, и в обл-ти D будем расс-ть $F(x, \dots, \overset{\text{ЧП x со степенями}}{p_{i_1 \dots i_n}}, \dots)$, $x \in D$, $i_1, \dots, i_n$:, $i_j \geq 0$, $i_j \in \mathbb{N}$.

$p_{i_1 \dots i_n}$, $i_1 + i_2 + \dots + i_n = k$, где $k = \cancel{0,m}$ $\overline{0,m}$

Пусть $\frac{\partial F}{\partial p_{i_1 \dots i_n}} \neq 0$, $i_1 + \dots + i_n = m$ – есть члены посл. порядка

Тогда: $F(x, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}, \dots) = 0$ (1) – уравнение в частн. произв-ых пор-ка m

Если F – линейная ф-я по $p_{i_1} \dots p_{i_n}$, то

$$\sum_{k=0}^{m} \sum_{i_1 \dots i_n} \overset{\text{перем. коэфф.}}{A^k_{i_1 \dots i_n}(x)} \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} = f(x) \quad (2)$$

лин. ур-е пор-ка m

(отн. ф-ии со всеми ее ЧП, но не отн. самих перем.) с перем. коэфф.

Если ур-е линейно по старшим производным, то оно КВАЗИЛИНЕЙНО.

Если в (2) $f(x) = 0$, то такое ур-е наз. ОДНОРОДНЫМ: $Lu = 0$.

1) Решения однородн. ур-я образ. линейн. пр-во:

u_1 и u_2 – реш-я $\Rightarrow$ $\alpha u_1 + \beta u_2$ – решение

2) Неоднородн. ур-е имеет единств. реш-е $\Leftrightarrow$ решение однородного ур-я – нулевое:

3) $Lu = f(x)$ – $\forall$ решение: $u = \underbrace{u_f}_{\text{частн. реш-е неоднородного ур-я}} + \overset{\text{реш-е однородного}}{u_0}$

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{\overset{\text{кол-во перем.}}{n}} \underset{\text{и перем. коэфф.}}{b_i(x)} \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) u = f(x) \quad (3)$$

$(\exists A_{ij} \neq 0)$

~~Если $\forall A_{ij}(x) = 0$, то ур-е вырождается~~.

Система: F N-мерный и N_1-мерный порядок ур-я m (~~порядок~~ сист. $N m$, $N N_1$?)

Классификация для 2 пор-ка $\boxed{5}$

Уравнению (3) сопоставим квадратичную форму

$$Q(\lambda_1 \dots \lambda_n) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) \lambda_i \lambda_j$$

С помощью [невырожденного] или аффинного преобр-я координат:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_1(\xi_1 \dots \xi_n) \\ \dots \\ \lambda_n = \lambda_n(\xi_1 \dots \xi_n) \end{cases} \qquad \frac{\partial(\lambda_1 \dots \lambda_n)}{\partial(\xi_1 \dots \xi_n)} \neq 0$$

4) Продолжение классиф. любого пор-ка

∃ число ур-й = числу ф-й, мн. ур-е.

∀ $i_1,\dots,i_n$ определена матрица $\left\|\dfrac{\partial F_{i=\text{номер ур-я}}}{\partial p^{j=\text{номер ф-ии}}_{i_1,\dots,i_n}}\right\|$ квадр.

$$\text{Форма } K(\lambda_1,\dots,\lambda_n)=\det\left(\sum_{\substack{i_1,\dots,i_n\\ \Sigma i_j=m}}\left\|\ \right\|\cdot\lambda_1^{i_1}\cdots\lambda_n^{i_n}\right),\ (\lambda\in\mathbb{R})$$

— ХФ ур-я

$$\left(p^j_{i_1,\dots,i_n}=\frac{\partial^m u_j}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_m^{i_m}}\right)$$

(Ур-е лин ⇒ коэфф-ты формы зав. только от x)

Ур-е **параболически выр. в X**, если ∃ невырожд. афф. преобр-е коорд $\lambda_i(\mu_1,\dots,\mu_n)$, в рез-те кот. форма содержит меньше n пер-х μ.

Ур-е **эл в X**, если кон многочл $K(\lambda_1,\dots,\lambda_n)=0$ не имеет действ. ненул. решений

нелин ур-е ⇒ зав ЧП от реш.
⇒ класс. по типам для реш-я в точке

Ур-е **гиперб в X**, если
1) не параб
2) ∃ прямая в пр-ве перем. λ_i, что если принять ее за коорд ось в μ_i невырожд афф преобр, (ур-е из опред эл) имеет Nm действ корней $\left(\left[\begin{array}{l}\text{прост}\\ \text{кратн}\end{array}\right.\right)$ отн. новой коорд ∀ остальных μ

$\Rightarrow Q = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i^2$, где $\alpha_i = -1, 1, 0$ (*) [приведение к главным осям]

инерция и дефект — инварианты

Опр.: Ур-е (3) наз. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ в т. $x \in D$, если только один коэф-т ↑ $\alpha = -1$, а остальные $(n-1)$ равны 1 (или vise verca) в (*).

Опр.: Ур-е (3) наз. ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ в т. $x \in D$, если все α_i либо $= 1$, либо $= -1$ в (*).

Опр.: Ур-е (3) наз. ПАРАБОЛИЧЕСКИМ в т. $x \in D$, если один из коэф-тов $\alpha = 0$ в (*), а остальные — одного знака.

Есть дальнейшая классификация:

Опр.: Ур-е (3) наз. УЛЬТРАГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ в т. x, если l коэф-тов $\alpha_i = -1$, а остальные $(n-l) = +1$ в (*).

Опр.: Ур-е (3) наз. УЛЬТРАПАРАБОЛИЧЕСКИМ в т. x, если l коэф-тов $\alpha_i = 0$, а остальные — одного знака в (*)

Больше в учебнике

Опр.: Ур-е (3) наз. гиперболическим (эллиптич., параболич.) в обл-ти D, если оно — гиперболическое (эллиптическое, параболическое) в каждой точке обл-ти D.

Приведение дифф ур-я (3) во всей обл-ти возможно только в двумерном случае.

"2 незав пер

Система УЧП

~~Пусть $F = (F_1, \ldots, F_N)$, где $F_i = F_i(x, \ldots, p_{i_1 \ldots i_n}, \ldots)$, $x \in E^n$~~

~~$p_{i_1 \ldots i_n} = (p^1_{i_1 \ldots i_n}, \ldots, p^{N_1}_{i_1 \ldots i_n})$~~

~~Тогда равенство (1'): $F(x, \ldots p_{i_1 \ldots i_n}, \ldots) = 0$, где~~

~~$u = (u_1 \ldots u_{N_1})$, $p_{i_1 \ldots i_n} = \frac{\partial^{i_1 + \ldots + i_n} u_k}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}$, $\frac{\partial F}{\partial p_{i_1 \ldots i_n}} \neq 0$~~

~~является системой уравнений в частных производных $N \times N_1$ -го порядка.~~

3.3.

Приведение к каноническому виду уравнений в частных производных 2го порядка. в 2D

(1) $\underline{a_{11}} u_{xx} + 2\underline{a_{12}} u_{xy} + \underline{a_{22}} u_{yy} + b_1 u_x + b_2 u_y + cu = f(x,y)$,

где $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c, f$ – ф-ции от $(x,y) \in D \subset E^2$.

С помощью невырожденного преобр-я: $\begin{cases}\xi = \varphi(x,y),\\ \eta = \psi(x,y)\end{cases}$ $u(\xi,\eta)$.

$\frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix}\varphi_x & \varphi_y\\ \psi_x & \psi_y\end{vmatrix} \neq 0$, чтобы систему можно обратить;

выражаем ЧП

$$\begin{cases}
u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x\\
u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y\\
u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}\\
u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}\\
u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}
\end{cases}$$

подст.

$\Rightarrow \bar a_{11} u_{\xi\xi} + 2\bar a_{12} u_{\xi\eta} + \bar a_{22} u_{\eta\eta} + \bar F = 0$ (2),

где $\bar a_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\eta_x + a_{22}\eta_x^2$

$\bar a_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y$

$\bar a_{22} = a_{11}\xi_y^2 + 2a_{12}\xi_y\eta_y + a_{22}\eta_y^2$

Выберем ξ, η т.ч. $\bar a_{11} = 0$, $\bar a_{22} = 0$

1пор-ка от 2пер-х

$\boxed{Л}$ 1) Если ф-я $z = \varphi(x,y)$ явл. частным реш-ем $a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0$ (3), то y: $\varphi(x,y) = \underline{C}$ – явл. ~~решением~~ общ. интеграл хар. ОДУ: $a_{11}(dy)^2 \underline{-} 2a_{12}\,dx\,dy + a_{22}(dx)^2 = 0$ (4)

2) Если $\varphi(x,y) = C$ – общий интеграл ОДУ (4), то $z = \varphi(x,y)$ – решение (3).

Док-во: 1) P y, получ. из соотн. $\varphi = C$ – реш-е ОДУ (4)

1) $\varphi(x,y) = C \Rightarrow$ {дифф-е неявн. ф-ции} $\Rightarrow y'_x = -\frac{\varphi_x'}{\varphi_y'}$

(3) $\Leftrightarrow a_{11}\underbrace{\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)}_{y'_x}^2 - 2a_{12}\underbrace{\frac{-\varphi_x}{\varphi_y}}_{y'_x} + a_{22} = 0$

$\Leftrightarrow a_{11}(y'_x)^2 - 2a_{12}y'_x + a_{22} = 0$

$a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}\,dx\,dy + a_{22}(dx)^2\Big|_{y=f(x,c)} = 0$

2) $\varphi(x,y) = C$ – общий интеграл (4)

$\forall (x_0,y_0) \in D$: реш-е (4) – инт. кривая ур-я (4) $y = f(x, \overset{\varphi(x_0,y_0)}{C_0}) \Rightarrow$ дифф-ем, что (3) в точке ф-ю $\Rightarrow$ (3), ч.т.д. $\Rightarrow$ в D

$\frac{dy}{dx} \to -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$; $x = x_0$

3.4

Опр. 1. Ур-е $a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}\,dx\,dy + a_{22}(dx)^2 = 0$ наз. характеристическим уравнением уравнения в частных производных.
Его инт-л — хар-ка.

Полагаем $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \Psi(x,y)$, где $\varphi(x,y)$ — реш-е характеристич. ур-я, $\Psi(x,y)$ — другое независимое с ним реш-е характеристич. ур-ния. $\boxed{\Rightarrow \overline{a}_{11} = \overline{a}_{22} = 0}$

$$y'_x = \frac{a_{12}+\sqrt{D}}{a_{11}}, \quad y'_{1x} = \frac{a_{12}-\sqrt{D}}{a_{11}} \qquad \underline{D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}$$

— реш-я хар. ур. как квадр. — 2 хар-ки, прох. через точку

1) Если $D > 0$, то ур-е (1) — ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ **bx** −1 ||||

2) Если $D < 0$, то ур-е (1) — ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ **bx** | |||

3) Если $D = 0$, то ур-е (1) — ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ **bx** ∪ im

$(\overline{a}_{12}^2 - \overline{a}_{11}\overline{a}_{22}) = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})$ (smth > 0)

---

1) $\boxed{\overline{a}_{11} = 0,\ \overline{a}_{22} = 0}$ обнуляем → ~~$\xi = x+y$~~, $\eta = x-y$ ⇒ I кор: $\boxed{u_{\xi\eta} = \Phi(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)} = \dfrac{-\overline{F}}{2\overline{a}_{12}}$

Гипер.

II кор.: $\boxed{\begin{matrix}\xi = \alpha+\beta\\ \eta = \alpha-\beta\end{matrix}}$ ⇒ вырат. α,β, $u_\xi = \frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta)$, $u_{\xi\eta} = 1/4(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta})$ II $\boxed{u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = 4\Phi}$

2) $D = 0$ $\quad \xi = \varphi(x,y)$, η — $\boxed{\forall \text{ другое}}$ независ. реш-е
произв. ф-я $\eta(x,y)$

$\boxed{u_{\eta\eta} = \Phi}$ $\boxed{\text{Параб. } u_{xx} = u_t}$

3) $D < 0$ $\quad \varphi(x,y)$ — реш., $\varphi^*(x,y)$: $\boxed{\alpha = \dfrac{\varphi+\varphi^*}{2},\ \beta = \dfrac{\varphi-\varphi^*}{2i}}$ ⇒ $\overline{a}_{11} = \overline{a}_{22}$, $a_{12} = 0$

$\boxed{u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi(\alpha,\beta,u,u_\alpha,u_\beta)}$ $\boxed{\text{Эл. } (\Delta u = 0)}$

④ Волновое уравнение. Формула Кирхгофа.

Волновое ур-е: $\Delta u - u_{tt} = 0$, $x = (x_1 \dots x_n) \in E^n$, $t \in E^1$, $\overset{>0}{}$

$u(x,0) = \varphi(x)$; $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)$. (ЗК) — найти рег. реш-е

рассм. $n = 3$: $(*)\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$. — гиперболическое ур-е в E^4

$\boxed{1}$ $u(x,t) = \int\limits_{S: |x-y|^2 = t^2} \frac{\overset{\in C^2 \text{ на } S}{\mu(y_1,y_2,y_3)}}{|y-x|} dS_y$, ~~где $|y-x| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}$~~, => рег. реш-е в пр-ве

~~S - сфера с центром т. x и радиусом t : $S = \{|x-y|^2 = t^2\}$~~.

~~$\mu(y_1,y_2,y_3) \in C^2$ на S по y_1, y_2, y_3 => $u(x,t)$ - регулярн. реш-е (*) в E^4~~.
произв. ф-ция

<u>Док-во:</u> Сделаем замену переменных: $y_i = \overset{\text{нач. точка}}{x_i} + t\overset{\text{factor}}{\xi_i}$, $i = 1, 2, 3$.
коорд. на ед. сфере

$\Rightarrow |\xi| = 1 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$, σ - сфера с центром в 0 и рад. 1.

$|y-x|^2 = t^2$, $dS_y = t^2 d\sigma_\xi$, где $d\sigma_\xi$ - элемент поверхности $|\xi| = 1$

$\Rightarrow u(x,t) = t \int\limits_\sigma \mu(x + t\xi) d\sigma_\xi \Rightarrow \Delta u = t \int\limits_\sigma \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \mu}{\partial y_i^2} d\sigma_\xi$

$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[t \int\limits_\sigma \mu(x+t\xi) d\sigma_\xi\right] = \int\limits_\sigma \mu(x+t\xi) d\sigma_\xi + t \int\limits_\sigma \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mu}{\partial y_i} \xi_i d\sigma_\xi =$

$= \frac{u}{t} + \frac{1}{t} I$, где $I = \int\limits_S \left[\frac{\partial \mu}{\partial y_1}\nu_1 + \frac{\partial \mu}{\partial y_2}\nu_2 + \frac{\partial \mu}{\partial y_3}\nu_3\right] dS_y \overset{\text{ГО}}{=} \int \Delta\mu\, dy$, (ν_1, ν_2, ν_3) - внешн. нормаль к сфере.

$\left|\frac{\partial}{\partial t}\right. \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{u}{t^2} + \frac{1}{t}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{I}{t^2} + \frac{1}{t}\frac{\partial I}{\partial t} = ~~-\frac{u}{t^2} + \frac{1}{t}\left(u/t + \frac{1}{t} I\right) - \frac{I}{t^2}~~ + \frac{1}{t}\frac{\partial I}{\partial t}$ ~~$= \frac{1}{t}\frac{\partial I}{\partial t}$~~

~~По ф. Гаусса-Остроградского: $I = \int\limits_{|x-y| \le t} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \mu}{\partial y_i^2} dy = \int\limits_{\mathcal{D}} \Delta\mu\, dy$~~.
~~$\mathcal{D}$ ← внутренность сферы S~~

Перейдём от декартовых координат к сферическим ρ, φ, θ:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \rho\cos\varphi\sin\theta, & \theta \in [0,\pi], \\ y_2 = x_2 + \rho\sin\varphi\sin\theta, & \varphi \in [0, 2\pi], \\ y_3 = x_3 + \rho\cos\theta \end{cases} \qquad \frac{\partial(y_1,y_2,y_3)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = \rho^2\sin\theta \Rightarrow$$

$\Rightarrow dy = \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$.

$\Rightarrow I = \int\limits_0^t \rho^2 d\rho \int\limits_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{2\pi} \Delta\mu\, d\varphi$

$\Rightarrow \frac{\partial I}{\partial t} = t^2 \int\limits_\sigma \Delta\mu\, d\sigma_\xi$, т.к. $\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = d\sigma_\xi \Rightarrow \frac{1}{t}\frac{\partial I}{\partial t} = t\int\limits_\sigma \Delta\mu\, d\sigma_\xi = \Delta u$, ч.т.д.

$t M(\mu) \overset{1/4\pi\, u_0(x,t)}{=} \frac{1}{4\pi} t \int\limits_\sigma \mu(y) d\sigma_\xi \Rightarrow M(\mu) = \cancel{\frac{1}{4\pi}} \int\limits_\sigma \mu(y) d\sigma_\xi \Rightarrow M(\mu) = \cancel{\frac{1}{4\pi t^2}} \int\limits_{S: |x-y|^2 = t^2} \mu(y) dS_y$
инт. среднее по $\int$

~~$y = x + t\xi$~~

1) $t M(\psi)$ - регулярное решение

2) $\frac{\partial}{\partial t}[t M(\varphi)]$ - регулярное реш-е $\overset{\text{при } C^3}{}$, т.к. ур-е им. постоянные коэф-ты

Если $\overset{\text{в з. Коши (ЗК)}}{\varphi(x) \in C^3, \psi(x) \in C^2} \Rightarrow u(x,t) = t M(\psi) + \frac{\partial}{\partial t}[t M(\varphi)]$, $\cancel{\frac{1}{4\pi}}$ ← регул. реш-е

└ ФОРМУЛА КИРХГОФА

$u(x,0) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_\sigma \varphi(x) d\sigma_\xi = \varphi(x)$; $\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_\sigma \psi(x) d\sigma_\xi = \psi(x)$ => удовл. нач. усл-ям

$\exists$ Нач. данные опред. на гиперплоск. $t=0$ в $\mathbb{E}^4$ $\Rightarrow$ Кирхгоф дает реш-е везде

Если нет $\Rightarrow$ дает реш-е только в тех точках (x, t), для кот. перес. конуса $K: |y-x|^2 - |\tau - t|^2 = 0$ с гиперп. $\tau = 0$ $\subset G \subset \mathbb{E}^4$

что-то вроде сферы

П. Гюйгенса: знаем $\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \psi$ на сфере $|y-x|^2 = t^2$ в $\mathbb{E}^3$ $\Rightarrow$ можем напрямую вычислить $u(x, t)$

⑤. Формула Пуассона. Метод спуска. $\boxed{7}$ Пуля + Данила

Решение $u(x_1,x_2,t)$ з. Коши для волн. ур-я с двумя простр. переменными

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \qquad (\Delta u=u_{tt}),\ x=(x_1,x_2)\in E^2,\ t\in E^1$$

с нач. данными: $u(x_1,x_2,0)=\varphi(x_1,x_2)$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x_1,x_2,t)\Big|_{t=0}=\psi(x_1,x_2),$$

треб-я

которые им. непр. частные производные 3-го и 2-го порядка соответственно, может быть получено из ф. Кирхгофа

$$u(x_1,x_2,x_3,t)=\frac{1}{4\pi}tM(\varphi)+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}[tM(\varphi)] \quad (1)$$ методом спуска

Суть метода: $\varphi=\varphi(x_1,x_2)$, $\psi=\psi(x_1,x_2)$

$$(1)\Rightarrow u(x_1,x_2,t)=\frac{1}{4\pi t}\int\limits_{|y^2|=t^2}\psi(x_1+y_1,x_2+y_2)\,dS_y+$$ распис. М

$$+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\Big[\frac{1}{t}\int\limits_{|y^2|=t^2}\varphi(x_1+y_1,x_2+y_2)\,dS_y\Big]$$ — не завис. от x_3 и удовл. ур-ю и нач. усл. з

dy_1dy_2 – проекция эл-та площади dS_y сферы $|y|^2=t^2$ на круг $y_1^2+y_2^2<t^2$: $dy_1dy_2=dS_y\cos(\widehat{i_3,\nu})=\frac{y_3}{|t|}dS_y$, где i_3 – орт оси x_3, ν – нормаль сферы $|y|^2=t^2$ в т. (y_1,y_2,y_3)

При выч-нии инт-лов з нижняя $(y_3<0)$ и верхняя $(y_3>0)$ половины сферы $|y|^2=t^2$ проектируются на круг $y_1^2+y_2^2<1$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{u(x_1,x_2,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_d\frac{\psi(y_1,y_2)\,dy_1dy_2}{\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}}+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_d\frac{\varphi(y_1,y_2)\,dy_1dy_2}{\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}}},$$

где d – круг: $(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2<t^2$ ‖ ↑ ФОР-ЛА ПУАССОНА (2)

(не окр-ть) нес. инт. ??

[из (2) видно, что для опред-я волны $u(x_1,x_2,t)$ в т. (x_1,x_2,t) недостаточно знания зн-й $\varphi(x_1,x_2)$ и $\psi(x_1,x_2)$ на окружности $(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2=t^2$, так же требуется зн-я нач. данных $\varphi(x_1,x_2)$ и $\psi(x_1,x_2)$ во всех точках круга d (не вып-ся принцип Гюйгенса].

Даламб

Получим не методом спуска, а другим.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \xi = x+t, \quad \eta = x-t \qquad v(\xi,\eta) = u\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} = 0 \qquad \iint \qquad v = \overset{\in C^2}{f_1}(\xi) + \overset{\in C^2}{f_2}(\eta)$$

$$u = f_1(x+t) + f_2(x-t)$$ – иск. реш-е

Подст. в нач. усл-я

$$\begin{cases} f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x) \\ f_1'(x) - f_2'(x) = \psi(x), \end{cases} \quad G \qquad \boxed{\iint}$$

$$\begin{cases} f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x) \\ f_1(x) - f_2(x) = \int\limits_{x_0 \in G}^{x} \psi(\tau)\,d\tau \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(x) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x) + \int\limits_{x_0}^{x} \psi(t)\,dt\right) \\ f_2(x) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x) + \boxed{\int\limits_{x}^{x_0}} \psi(t)\,dt\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{gathered} u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+t) + \varphi(x-t) + \int\limits_{x-t}^{x+t} \psi(\tau)\,d\tau\right] \\ u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)\right) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,d\xi \end{gathered}}$$

обл внутри, G зав. от (x,t):

Области зав-ти (нач. данные в обл. $\Rightarrow u(x,t)$):

$n=3$ — сфера
$n=2$ — круг
$n=1$ — сегмент

Обл. влияния: $(x,t)\colon |y-x|^2 \leq t^2 \cap G \neq \varnothing$

Область опред $\left(\overset{\in E^n}{(x,t)}\colon \text{нач. данные в } G \Rightarrow u(x,t)\right)$

$n=3$ — перес. конуса с $\tau=0$
$n=2$ — круг
$n=1$ — сегмент

⑧ Ед-сть реш-я ЗК для волн. ур-я

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \\ u(x, t_0) = \varphi(x), \quad G \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t_0) = \psi(x), \quad G \end{cases}$$

Р !и в обл. опред.

$(u_1 - u_2)$ — реш-е однор. ЗК. Однор. имеет только тривиальное рег. реш-е $\Rightarrow$!

$\exists D$ — кон. подобл. из обл. опред. рег реш однор. зад., огр. $\begin{cases} \text{конусом } K \\ \tau = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} u \text{ рег реш неоднор} \\ x = y,\ \tau = t \end{cases} \Rightarrow$ тожд-во $-2\frac{\partial u}{\partial \tau}\left(\sum \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}\right) =$

$$-2\sum \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{\partial u}{\partial y_i}\frac{\partial u}{\partial \tau}\right) + \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\sum\left(\frac{\partial u}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)^2\right) = 0$$

$\iint_D$, ОГ $\Rightarrow \int_{\partial D}\left(-2\sum \frac{\partial u}{\partial \tau}\frac{\partial u}{\partial y_i} y_{i\nu} + \left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)^2 T_\nu + \sum\left(\frac{\partial u}{\partial y_i}\right)^2 T_\nu\right) dS = 0$

($y_{i\nu}, T_\nu$ — cos един. вектора нормали к ∂D в (y, τ))

1) Однор. нач. усл. На части ∂D, где $\tau = 0$, $\int = 0$.

2) На ост. части M $\quad \int_M \frac{1}{T_\nu}\sum\left(\frac{\partial u}{\partial y_i} T_\nu - \frac{\partial u}{\partial \tau} y_{i\nu}\right)^2 dS = 0$

$T_\nu = \text{const} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y_i} T_\nu - \frac{\partial u}{\partial \tau} y_{i\nu} = 0$

На M внутр произв $u(y, t)$ по n незав напр $= 0 \Rightarrow u|_M = \text{const}$

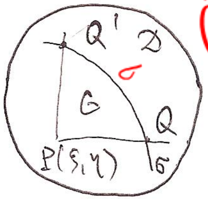
$u(y, 0) = 0 \Rightarrow u(y, \tau) = 0,\ \partial D \qquad \Rightarrow u(x, t) = 0,\ u \equiv 0.$

⑫ Гиперболические уравнения общего вида. Задача Коши.

9

Общий вид для всех ур

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + a\frac{\partial u}{\partial\xi} + b\frac{\partial u}{\partial\eta} + cu = \boxed{F}\ ;\quad \mathcal{L}^*v = \frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{\partial}{\partial\xi}(av) - \frac{\partial}{\partial\eta}(bv) + cv$$



① σ – разомкнутая дуга Жордана с непр. кривизной, не имеющая точек касания с характеристиками

непр. образ отр-ка

гладкое, непр. 1ые произв.

Q' и Q – точки пересечения характеристики с кривой

~~[illegible] v удовлетв. диф. в обл-ти G ф-ции~~ ∀ $u(\xi_1,\eta_1)$, $v(\xi_1,\eta_1)$ $\in C^2(G)$ ~~верно~~

② **тождество**: $2(v\mathcal{L}u - u\mathcal{L}^*v) = \frac{\partial}{\partial\eta_1}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi_1}v - \frac{\partial v}{\partial\xi_1}u + 2buv\right) + \frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta_1}v - \frac{\partial v}{\partial\eta_1}u + 2auv\right).$

$$2\left(v\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) + \left[av\frac{\partial u}{\partial\xi}\right] + \left[bv\frac{\partial u}{\partial\eta}\right] + \cancel{cuv} - u\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial v}{\partial\eta}\right) + \left[ua\frac{\partial v}{\partial\xi}\right] + \left[ub\frac{\partial v}{\partial\eta}\right] - \cancel{cuv}\right)$$

2auv 2buv

③ **Проинтегрируем** по обл-ти G тождество (приму на веру) и применим ф-лу **Грина**:

$$\iint_G\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy = \oint_{\partial G}(P\,dx + Q\,dy)$$

$$\Rightarrow 2\iint_G(v\mathcal{L}u - u\mathcal{L}^*v)\,d\xi\,d\eta = \int_{\partial G}\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial\eta_1}v - \frac{\partial v}{\partial\eta_1}u + 2auv\Big)^{②}d\eta_1 - \Big(\frac{\partial u}{\partial\xi_1}v - \frac{\partial v}{\partial\xi_1}u + 2buv\Big)^{①}d\xi_1\Big]$$

Пусть $u(\xi_1,\eta_1) = \underline{u(P')}$ ↑ – решение ур-е $\mathcal{L}u = F$

$P = (\xi,\eta)$

$v(\xi_1,\eta_1) = \underline{v(P')} = R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta) = R(P',P)$ – ф-ция Римана

$$\Rightarrow u(P) = \frac{1}{2}u(Q)R(Q,P) + \frac{1}{2}u(Q')R(Q',P) + \iint_G F(P')R(P',P)\,d\xi_1\,d\eta_1 - \frac{1}{2}\int_{QQ'}\left[\frac{\partial u(P')}{\partial N}R(P',P) - u(P')\frac{\partial R(P',P)}{\partial N}\right]d\sigma_{P'} - \int_{QQ'}\left[a(P')\frac{\partial\xi_1}{\partial N} + b(P')\frac{\partial\eta_1}{\partial N}\right]\cdot R(P',P)u(P')\,d\sigma_{P'},$$

где $\frac{\partial}{\partial N} = \frac{\partial\xi_1}{\partial\nu}\frac{\partial}{\partial\eta_1} + \frac{\partial\eta_1}{\partial\nu}\frac{\partial}{\partial\xi_1}$, ν – внешняя нормаль дуги σ в точке P'

Наоборот,

Если в правой части будем считать, что u и $\frac{\partial u}{\partial N}$ – произвольно заданные на σ дост. гладкие функции, то $u(P)$ – решение $\mathcal{L}u = F$

Если искомое решение $u(P)$ и $\frac{\partial u(P)}{\partial \ell}$, где ℓ – заданный на σ вектор, который нигде не совпадает с касательной к σ, известны на σ: $u(P) = \varphi(P)$, $\frac{\partial u(P)}{\partial\ell} = \psi(P)$, $P\in\sigma$,

где φ и ψ – соотв. дважды и один раз дифф-ые, то $\frac{\partial u}{\partial N}$ всегда можно определить однозначно.

⇒ полученная ф-ла даёт решение задачи $\mathcal{L}u = F$, $u(P) = \varphi(P)$, $\frac{\partial u(P)}{\partial\ell} = \psi(P)$, $P\in\sigma$

[из процесса получ. ф-лы] ⇒ реш-е единств. и устойч.

⑬ ~~Гиперболические уравнения общего вида.~~ Задача Гурса.

$\boxed{W}$

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + a\frac{\partial u}{\partial\xi} + b\frac{\partial u}{\partial\eta} + cu = F$$

~~из формулы б.11~~

= по ф. из пункта ф. Р.

$$u(\xi,\eta) = u(\xi_0,\eta_0)R(\xi_0,\eta_0,\xi,\eta) + \int_{\xi_0}^{\xi} R(\xi_1,\eta_0;\xi,\eta)\frac{\partial u(\xi_1,\eta_0)}{\partial\xi_1} +$$

$$+ b(\xi_1,\eta_0)u(\xi_1,\eta_0)]\,d\xi_1 + \int_{\eta_0}^{\eta} R(\xi_0,\eta_1;\xi,\eta)\left[\frac{\partial u(\xi_0,\eta_1)}{\partial\eta_1} + a(\xi_0,\eta_1)u(\xi_0,\eta_0)\right]\cdot$$

$$\cdot d\eta_1 + \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 \int_{\eta_0}^{\eta} R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)Lu(\xi_1,\eta_1)\,d\eta_1$$ — $u(\xi,\eta)$ – реш-е $Lu=F$

интегрируем по частям:

$$\Rightarrow u(\xi,\eta) = R(\xi,\eta_0;\xi,\eta)u(\xi,\eta_0) + R(\xi_0,\eta;\xi,\eta)u(\xi_0,\eta) -$$

$$- R(\xi_0,\eta_0;\xi,\eta)u(\xi_0,\eta_0) + \int_{\xi_0}^{\xi}\left[b(t,\eta_0)R(t,\eta_0,\xi,\eta) - \frac{\partial}{\partial t}R(t,\eta_0;\xi,\eta)\right]\cdot$$

$$\cdot u(t,\eta_0)\,dt + \int_{\eta_0}^{\eta}\left[a(\xi_0,\tau)R(\xi_0,\tau;\xi,\eta) - \frac{\partial}{\partial\tau}R(\xi_0,\tau;\xi,\eta)\right]u(\xi_0,\tau)\,d\tau +$$

$$+ \int_{\xi_0}^{\xi} dt \int_{\eta_0}^{\eta} R(t,\tau,\xi,\eta)F(t,\tau)\,d\tau$$ ← если в правой части заменить $u(\xi,\eta_0)$ и $u(\xi_0,\eta)$ на произвольные непр. дифф. ф-ции, а $u(\xi_0,\eta_0)$ – на const, то получ. $u(\xi,\eta)$ – регулярное реш-е $Lu=F$.

$$\Rightarrow \begin{cases} Lu = F \\ u(\xi,\eta_0) = \varphi(\xi) \\ u(\xi_0,\eta) = \psi(\eta) \end{cases}$$ ← задача Гурса

где $\varphi(\xi)$ и $\psi(\eta)$ – непр. дифф.

$\varphi(\xi_0) = \psi(\eta_0)$.

↑ такая задача имеет единств. устойчивое реш-е $u(\xi,\eta)$:

$$u(\xi,\eta) = R(\xi,\eta_0;\xi,\eta)\underline{\varphi(\xi)} + R(\xi_0,\eta;\xi,\eta)\underline{\psi(\eta)} - R(\xi_0,\eta_0;\xi,\eta)\underline{\varphi(\xi_0)} +$$

$$+ \int_{\xi_0}^{\xi}\left[b(t,\eta_0)R(t,\eta_0;\xi,\eta) - \frac{\partial}{\partial t}R(t,\eta_0;\xi,\eta)\right]\underline{\varphi(t)}\,dt +$$

$$+ \int_{\eta_0}^{\eta}\left[a(\xi_0,\tau)R(\xi_0,\tau;\xi,\eta) - \frac{\partial}{\partial t}R(\xi_0,\tau;\xi,\eta)\right]\underline{\psi(\tau)}\,d\tau +$$

$$+ \int_{\xi_0}^{\xi} dt \int_{\eta_0}^{\eta} R(t,\tau;\xi,\eta)F(t,\tau)\,d\tau.$$

(Бит1 p172)

⑪ Гиперболическое уравнение общего вида. Сопряжённые операторы. Функция Римана.

{лин 2 пор-ка гипер гладкость

невыр преобр

11фР

Канонический вид: $\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + A(x,y)\frac{\partial u_1}{\partial x} + B(x,y)\frac{\partial u_1}{\partial y} + C(x,y)u = F_1(x,y)$ II к ф

Замена:

$\xi = x+y,\ \eta = x-y \Rightarrow \quad Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a\frac{\partial u}{\partial \xi} + b\frac{\partial u}{\partial \eta} + cu = F,$ I к ф

где $4a = A+B,\ 4b = A-B,\ 4c = C,\ 4F = F_1$.

$u(\xi,\eta) = u_1\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right)$.

характеристики уравнения ↑ : $\xi = const,\ \eta = const$.

Предполагая дифф-ть коэф-тов a и b, вводится оператор

$\boxed{L^* v} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi}(av) - \frac{\partial}{\partial \eta}(bv) + cv$, где L^* – сопряжённый к L.

Опр.: Решение $v(\xi,\eta)$ сопряжённого уравнения

$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi}(av) - \frac{\partial}{\partial \eta}(bv) + cv = 0$, удовл. на характ-ках $\xi = \xi_1$, $\eta = \eta_1$ условиям: $v(\xi_1,\eta) = e^{\int_{\eta_1}^{\eta} \underline{a}(\xi_1,\eta_2)d\eta_2}$, $v(\xi,\eta_1) = e^{\int_{\xi_1}^{\xi} \underline{b}(\xi_2,\eta_1)d\xi_2}$, где (ξ_1,η_1) – произв. фиксир. точка обл-ти D задания ур-я $Lu = F$, наз. **ФУНКЦИЕЙ РИМАНА**.

Т (при доп. требовании непр-ти $\frac{\partial a}{\partial \xi}$, $\frac{\partial b}{\partial \eta}$ и c ф-я Римана существует)

Pf:

Проинтегрируем сопряжённое уравнение: $\left(\int_{\xi_1}^{\xi}\int_{\eta_1}^{\eta}\right)$

$$v(\xi,\eta) + v(\xi_1,\eta_1) - v(\xi,\eta_1) - v(\xi_1,\eta) - \int_{\xi_1}^{\xi} b(\xi_2,\eta)v(\xi_2,\eta)d\xi_2 - \int_{\eta_1}^{\eta} a(\xi,\eta_2)v(\xi_1,\eta_2)d\eta_2 + \int_{\xi_1}^{\xi} d\xi_2 \int_{\eta_1}^{\eta} c(\xi_2,\eta_2)v(\xi_2,\eta_2)d\eta_2 + \int_{\xi_1}^{\xi} b(\xi_2,\eta_1)v(\xi_2,\eta_1)d\xi_2 + \int_{\eta_1}^{\eta} a(\xi,\eta_2)v(\xi_1,\eta_2)d\eta_2 = 0$$

Из опр-я $\Rightarrow v(\xi,\eta_1) - \int_{\xi_1}^{\xi} b(\xi_2,\eta_1)v(\xi_2,\eta_1)d\xi_2 = 1$

$v(\xi_1,\eta) - \int_{\eta_1}^{\eta} a(\xi_1,\eta_2)v(\xi_1,\eta_2)d\eta_2 = 1$. $v(\xi_1,\eta_1) = 1$ = совпад-т из усл-й на хар-ках

$\Rightarrow$ полученное равенство можно записать в виде линейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода относ-но $v(\xi,\eta)$.

$$v(\xi,\eta) - \int_{\xi_1}^{\xi} b(\xi_2,\eta)v(\xi_2,\eta)d\xi_2 = \int_{\eta_1}^{\eta} a(\xi,\eta_2)v(\xi,\eta_2)d\eta_2 + \int_{\xi_1}^{\xi} d\xi_2 \int_{\eta_1}^{\eta} c(\xi_2,\eta_2)v(\xi_2,\eta_2)d\eta_2 \quad = 1$$

∟ такое уравнение имеет единственное решение $\Rightarrow \exists$ фР.

- ф-ция Римана

$v = R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$: Из определения $\Rightarrow$

из усл-й на хар-ках

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R(\xi_1,\eta;\xi_1,\eta_1)}{\partial \eta} - a(\xi_1,\eta)R(\xi_1,\eta;\xi_1,\eta_1) = 0 \\ \dfrac{\partial R(\xi,\eta_1;\xi_1,\eta_1)}{\partial \xi} - b(\xi,\eta_1)R(\xi,\eta_1,\xi_1,\eta_1) = 0 \\ \dfrac{\partial R(\xi,\eta;\xi,\eta_1)}{\partial \eta_1} + a(\xi,\eta_1)R(\xi,\eta,\xi,\eta_1) = 0 \\ \dfrac{\partial R(\xi,\eta;\xi_1,\eta)}{\partial \xi_1} + b(\xi_1,\eta)R(\xi,\eta,\xi_1,\eta_1) = 0 \end{cases}$$

$R(\xi_1,\eta_1;\xi_1,\eta_1) = 1$

$R(\xi,\eta;\xi,\eta) = 1$

= при гладкости u в D

Очевидно, что $\dfrac{\partial^2}{\partial\xi_1\partial\eta_1}\left[u(\xi_1,\eta_1)R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta) - R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)Lu(\xi_1,\eta_1)\right] =$

$= \dfrac{\partial}{\partial\xi_1}\left[u\left(\dfrac{\partial R}{\partial\eta_1} - aR\right)\right] + \dfrac{\partial}{\partial\eta_1}\left[u\left(\dfrac{\partial R}{\partial\xi_1} - bR\right)\right]$ ← интегрируем по ξ_1 и η_1 в пределах: $\xi_0 \le \xi_1 \le \xi,\ \eta_0 \le \eta_1 \le \eta$

$$\Rightarrow u(\xi,\eta) = u(\xi_0,\eta_0)R(\xi_0,\eta_0;\xi,\eta) +$$

$$+ \int_{\xi_0}^{\xi} R(\xi_1,\eta_0;\xi,\eta)\left[\frac{\partial u(\xi_1,\eta_0)}{\partial\xi_1} + b(\xi_1,\eta_0)u(\xi_1,\eta_0)\right]d\xi_1 +$$

$$+ \int_{\eta_0}^{\eta} R(\xi_0,\eta_1;\xi,\eta)\left[\frac{\partial u(\xi_0,\eta_1)}{\partial\eta_1} + a(\xi_0,\eta_1)u(\xi_0,\eta_1)\right]d\eta_1 +$$

$$+ \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 \int_{\eta_0}^{\eta} R(\xi,\eta_1,\xi,\eta)Lu(\xi_1,\eta_1)\,d\eta_1 .$$

При $u(\xi,\eta) = R(\xi_0,\eta_0;\xi,\eta) \Rightarrow \displaystyle\int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 \int_{\eta_0}^{\eta} R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)LR(\xi_0,\eta_0;\xi_1,\eta_1)\,d\eta_1 = 0.$

$\Rightarrow$ ф-я Римана относительно последней пары переменных ξ_1,η_1 является решением однородного уравнения $LR(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) = 0$.

Аналогично, при непрерывной правой части $F(\xi,\eta)$ ур-я $Lu = F$ одним из его частных решений является функция

$$u_0(\xi,\eta) = \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 \int_{\eta_0}^{\eta} R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)F(\xi_1,\eta_1)\,d\eta_1 .$$

$\boxed{12}$ ЗК для волн ур в 1D

начальным условиям (25), в силу формулы (23) получаем

$$|u(x, t)| = \frac{1}{2}\left|\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} g(\tau_1, \tau)\, d\tau_1\right| < \varepsilon \int_0^\tau (t-\tau)\, d\tau = \frac{1}{2}\, \varepsilon t^2.$$

Следовательно, *малому изменению правой части неоднородного уравнения* (24) *в области ее задания соответствует малое изменение решения задачи Коши* (24), (25), *если область ограничена по переменному* t. Отсюда с учетом свойства единственности решения заключаем, что *для волновых уравнений задача Коши поставлена корректно.*

3°. Общая постановка задачи Коши. До сих пор мы считали, что носителем начальных данных (27) является плоскость $t = 0$ пространства E_{n+1} переменных $x_1, \ldots, x_n, t$. Мы сейчас на примере уравнения (13) покажем, каким условиям должен удовлетворять носитель L начальных данных, отличный от $t = 0$, и какой вид должны иметь сами начальные данные для того, чтобы полученная в окончательном итоге задача была поставлена ⇒ корректно.

Обозначим через D область плоскости переменных x, t с кусочно-гладкой жордановой границей S. Пусть $u(x, t)$ — ~~регулярное в области D решение уравнения (13), имеющее непрерывные частные производные в $D \cup S$.~~ рег (D), $C^1(\bar{D})$

Интегрируя тождество

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}\right) = 0 \tag{28}$$

по области D и используя формулу (GO), получаем

$$\int_D \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)\right] dx_1\, dt_1 = \int_S \frac{\partial u}{\partial x_1}\, dt_1 + \frac{\partial u}{\partial t_1}\, dx_1 = 0. \tag{29}$$

нос нач данных

Пусть L — разомкнутая кривая Жордана с непрерывной кривизной, удовлетворяющая двум требованиям: а) каждая прямая из двух семейств $x + t = \mathrm{const}$, $x - t = \mathrm{const}$ характеристик уравнения (13) пересекается с кривой L не более чем в одной ее точке и б) направление касательной к кривой ни в одной точке не совпадает с характеристическим направлением, соответствующим уравнению (13).

Предположим, что характеристики $x_1 - x = t_1 - t$, $x_1 - x = t - t_1$, выходящие из точки $C(x, t)$, пересекаются с кривой L в точках A и B. Применяя формулу (29) в области, ограниченной дугой AB кривой L и отрезками характеристик CA и CB, получаем (рис. 20)

$$\int\limits_{AB+BC+CA} \frac{\partial u}{\partial x_1} dt_1 + \frac{\partial u}{\partial t_1} dx_1 = 0. \tag{30}$$

Так как вдоль CA и BC имеем $dx_1 = dt_1$ и $dx_1 = -dt_1$ соответственно, то (30) можно записать в виде

$$\int\limits_{AB} \frac{\partial u}{\partial x_1} dt_1 + \frac{\partial u}{\partial t_1} dx_1 - 2u(C) + u(A) + u(B) = 0,$$

откуда находим

$$u(C) = \frac{1}{2} u(A) + \frac{1}{2} u(B) + \frac{1}{2} \int\limits_{AB} \frac{\partial u}{\partial x_1} dt_1 + \frac{\partial u}{\partial t_1} dx_1. \tag{31}$$

1D волн. $a^2=1$

Если решение $u(x, t)$ уравнения (13) удовлетворяет условиям

$$\boxed{u\Big|_L = \varphi, \quad \frac{\partial u}{\partial l}\Big|_L = \psi, \text{ + рег}} \tag{32}$$

где φ и ψ — заданные действительные соответственно дважды и один раз непрерывно дифференцируемые функции, а l — заданный на L достаточно гладкий вектор, нигде не совпадающий с касательной к кривой L, то, определяя $\frac{\partial u}{\partial x_1}$, $\frac{\partial u}{\partial t_1}$ из равенств

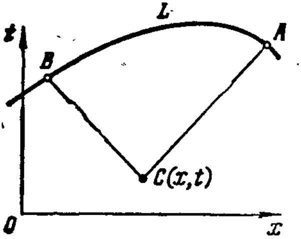


Рис. 20.

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial u}{\partial t_1}\frac{dt_1}{ds} = \frac{d\varphi}{ds},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dl} + \frac{\partial u}{\partial t_1}\frac{dt_1}{dl} = \psi,$$

где s — длина дуги L, и подставляя известные значения u, $\frac{\partial u}{\partial x_1}$, $\frac{\partial u}{\partial t_1}$ в правую часть (31), получим регулярное решение уравнения (13), удовлетворяющее условиям (32).

Задача отыскания регулярного решения уравнения (13), удовлетворяющего условиям (32), также называется *задачей Коши*. Из приведенного рассуждения следует, что *задача Коши в только что указанной постановке имеет единственное устойчивое решение.*

⑥ Уравнение Лапласа. Свойство гармонических функций.

Обозн. $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ – оператор Лапласа ; $\Delta u = 0$ – УР-Е ЛАПЛАСА

Опр.: Ф-я $u(x)$ называется гармонической в области D, если она обладает в D непр. частными производными до второго порядка включительно и удовлетворяет ур-ю Лапласа ↑

1 лин преобр ур-я
2 лин комб
3 => u=0
4 $\int_S \partial u / \partial n = 0$

Свойства:

1) $\overset{x \in \mathbb{R}^n}{u(x)}$ – гарм. ф-я в $D \Rightarrow u(\lambda Cx + h)$ – гарм. ф-я, λ – скаляр, C – пост., действ. ортогональн. м-ца порядка n, $h = (h_1 \dots h_n)$ – – постоянный действительный вектор $(x, \lambda Cx + h \in D)$.

▷
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ c_{in} & \cdots & c_{in} \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

$$y_j = \lambda \sum_{i=1}^{n} c_{ji} x_i + h_j \Rightarrow \frac{\partial y_j}{\partial x_i} = c_{ji} \cdot \lambda$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial u}{\partial y_n} \frac{\partial y_n}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial u}{\partial y_1} \cdot c_{1i} + \dots + \frac{\partial u}{\partial y_n} c_{ni} \right) \cdot \lambda$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial y_1} c_{1i} + \dots + \frac{\partial u}{\partial y_n} c_{ni} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial y_j} c_{ji} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_k} \left(\lambda \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial y_j} c_{ji} \right) \cdot \underbrace{\frac{\partial y_k}{\partial x_i}}_{c_{ki} \cdot \lambda} = \lambda^2 \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ji} c_{ki} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_j}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \lambda^2 \sum_{i} \sum_{k,j} c_{ji} c_{ki} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_j} = \lambda^2 \sum_{k,j} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_j} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} c_{ji} c_{ki}}_{= \begin{cases} 0, & k \neq j, \\ 1, & k = j. \end{cases}} = \lambda^2 \sum_{k} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2}$$

← т.к. C-ортогон. ◁

2) u_k – $k = \overline{1, m}$ – гарм. $\Leftrightarrow$ $u(x) = \sum_{k=1}^{m} u_k(x) c_k$ – гарм., $c_k = \text{const}$

∀ u – гарм. : (∗) $\underline{\int \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(u \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) d\tau} = \int \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + u \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}} \right) d\tau =$

0 из ур-я Лапласа

$$= \int \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\tau.$$

Если ∀ u, v – гарм. ф-ции $\Rightarrow \overline{\int \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v \frac{\partial u}{\partial x_i} - u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) d\tau} = 0$
↑
док-ся аналогично

Применим ф-лу Остроградского – Гаусса:

$$\underline{\qquad} \underset{Г-О}{=} \int_S u \frac{\partial u}{\partial n_s} ds = \int_D \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\tau \quad (1)$$

ОГ к инт.   рез-т преобр

$$\sqcap \overset{\text{Г-О}}{=} \int\limits_S \Big(v\frac{\partial u}{\partial n_s} - u\frac{\partial v}{\partial n_s}\Big) dS = 0 \quad (2)$$

ог к исх. рез-т преобр.

(1), (2) – ФОРМУЛЫ ГРИНА

Свойства:

$$u(x)\begin{cases}\text{гарм}, D\\ C^1, D\cup S\\ u|_S = 0\end{cases} \Rightarrow u = 0, D\cup S$$

3) ~~Если гарм. в обл-ти D ф-я $u(x)$ непр-на в $D\cup S$ вместе с производными 1го порядка, $u|_S = 0 \Rightarrow u(x) = 0$ для $\forall x\in D\cup S$~~ (св-во единственности гармонической функции).

$$D \overset{\text{1 ф Г}}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^{n}\int\limits_D \Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)^2 d\tau = \int\limits_S u\frac{\partial u}{\partial n}dS \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\int\limits_D \Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)^2 d\tau = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \; i=\overline{1,n}, \; x\in D, \text{ т.е. } u(x) = \text{const для } \forall x\in D \left.\begin{matrix} \\ u(y) = 0,\; y\in S\end{matrix}\right\} ⇒$$

$⇒$ {в силу непр-ти $u(x)$ в $D\cup S$ – замкн.} $\Rightarrow u(x) = 0, \forall x\in D\cup S$ ◁.

4) Интеграл, взятый по гр-це S от нормальной производной $\frac{\partial u}{\partial n}$ ($u(x)$ – гарм. в обл-ти D, непр. вместе со своими первыми производными по опр) $= 0$: $\boxed{\int\limits_S \frac{\partial u(x)}{\partial n} dS_y = 0}$ [положив в (2) $v(x) = 1, x\in D$].

Рассм. ур-е для опред-я фунд. реш-я ур-я Лапласа:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{du}{dr} = 0 \leftarrow \text{УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА.}$$

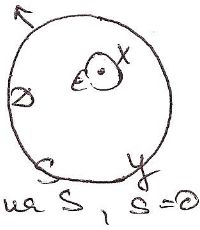
$u = 1$ – решение. Ищем реш-е в виде $u = r^k$; zeta

$$k(k-1)r^{k-2} + (n-1)\overset{(\cdot\frac{1}{r})}{k\underline{r^{k-2}}} = 0$$

$$-2k + k^2 + nk = 0 \Rightarrow k = 0 \vee k = 2-n \Rightarrow \underline{u = 1 \vee u = r^{2-n}}$$

$$\measuredangle\; E(r) = \begin{cases} -\ln r, & n=2,\\ \dfrac{1}{(n-2)r^{n-2}}, & n>2\end{cases} \leftarrow \text{Пусть } r = |x-y|$$

$E(x,y)$ – потенциал единичн. заряда, помещённого в т. x.



y на S, $S = \partial D$

ω_n – площадь ед. сферы в E^n, $\omega_n = \dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$

$\Rightarrow E(x,y) = \dfrac{1}{(n-2)|x-y|^{n-2}}$ – гарм. ~~и по x, и по~~ y, при $x\neq y$.

$S\cup |x-y| = \varepsilon$ – гр-ца обл-ти гарм-ти ф-й u и E.

↑?

$$\text{Рассм. } \int\limits_S \Big(E(x,y)\frac{\partial u}{\partial n_s} - u\frac{\partial E}{\partial n_s}\Big)dS_y = -\int\limits_{|x-y|=\varepsilon}\Big(E\frac{\partial u}{\partial n_\varepsilon} - u\frac{\partial E}{\partial n_\varepsilon}\Big)dS_\varepsilon$$

= из II ф Г по всей границе

$$I_1 = \int\limits_{|x-y|=\varepsilon} E\frac{\partial u}{\partial n_\varepsilon}dS_\varepsilon = E_\varepsilon(x,y)\int\limits_{|x-y|=\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n_\varepsilon}dS_\varepsilon = 0$$ why?

$$I_2 = \int\limits_{|x-y|=\varepsilon} u(y)\frac{\partial E}{\partial n_\varepsilon}dS_\varepsilon = \int\limits_{|x-y|=\varepsilon} u(x)\frac{\partial E}{\partial n_\varepsilon}dS_\varepsilon + \int\limits_{|x-y|=\varepsilon}[u(y)-u(x)]\frac{\partial E}{\partial n_\varepsilon}dS_\varepsilon \circleddash$$?

$$\ominus\ u(x)\int\limits_{|x-y|=\varepsilon}\frac{\partial E}{\partial \bar n_\varepsilon}\,dS_\varepsilon + \{0\} = \omega_n u(x)$$

$$\underset{\nearrow}{\text{"}}\ \frac{\omega_n\varepsilon^{n-1}}{\varepsilon^{n-1}}\ ?$$

$$\left\{\frac{\partial E}{\partial \bar n_\varepsilon} = -\frac{\partial E}{\partial r} = -\frac{1}{r^{n-1}}\right\}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} u(x) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S\left\{E(x,y)\frac{\partial u}{\partial \bar n_s} - u\frac{\partial E(x,y)}{\partial \bar n_s}\right\}dS$$

Теорема о среднем для гармонической функции!

Из интегрального представления имеем:

$$E(x,y) = \begin{cases} -\ln R, & n=2,\\ \dfrac{1}{(n-2)R^{n-2}}, & n>2\end{cases}$$

$$I_1 = \int\limits_{C_R} E\frac{\partial u}{\partial n_{C_R}}\,dS_{C_R} = E(R)\int\limits_{C_R}\frac{\partial u}{\partial n_{C_R}}\,dS_{C_n} = 0$$

$$I_2 = \int\limits_{C_R} u\frac{\partial E}{\partial \bar n_{C_R}}\,dS_{C_R} = \omega_n u(x)$$

$$\Rightarrow u(x) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{C_R} u\,dS_{C_R}\frac{1}{R^{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{\omega_n R^{n-1}}\int\limits_{C_R} u(y)\,dS_y$$ – т. о среднем по поверхности сферы.

$$|y-x| = \rho \le R:\quad u(x) = \frac{1}{\omega_n\rho^{n-1}}\int\limits_{C_\rho} u(y)\,dS_y \quad \Big|\cdot\rho^{n-1}\int_0^R d\rho$$

интегрируем $\Rightarrow$ $$u(x) = \frac{n}{\omega_n R^n}\int\limits_{C_R} u(y)\,d\tau_y$$ – т. о среднем по шару

$\boxed{\text{Т:}}$ [принцип экстремума для гармонической функции]: Внутри области гармоничности гарм.-ф-я не достигает ни своего наибольшего, ни своего наименьшего значения (если она не постоянная)

Док-во: [от противного]:

M – макс.
m – мин.

$$u(x_0) = M = \frac{n}{\omega_n R^n}\int\limits_{\Omega_R} u(y)\,d\tau_y.$$ Но должно быть $u(y) < M$ – вокр. т. x_0 в некоторой Ω_R, т.к. x_0 – т. макс.

$\Rightarrow u(y) = M$ ↯, ч.т.д.

(Гамма-функция: $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx$)

⑦ Уравнение Лапласа. Формула Грина.

~~Нужно также присовокупить мат-л б. ⑥.~~

Пусть в обл-ти Q ($\partial Q \in C^1$) задан $A(x)=(A_1(x)\dots A_n(x))$ – вектор, $A_i(x)\in C(\overline{Q})\cap C^1(Q)$, $i=\overline{1,n}$.

$\boxed{T}$ [из анализа, ф. Остроградского] Если ф-я $\operatorname{div}A(x)\equiv\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial A_i}{\partial x_i}$ – непр. в $\overline{Q}$ [или даже интегр-ма по Q] $\Rightarrow$ спр-ва формула:

$$\int\limits_Q \operatorname{div}A(x)\,dx = \int\limits_{\partial Q} A(x)n(x)\,dS$$

, где n – ед. вектор внешней нормали к ∂Q ~~Q~~.

Пусть $u(x)\in C^2(Q)\cap C^1(\overline{Q})$, $v\in C^1(\overline{Q})$, ф-я $\Delta u=\operatorname{div}(\nabla u)$ – интег-ма по Q. Т.к. $v\Delta u = v\operatorname{div}(\nabla u)=\operatorname{div}(v\nabla u)-\nabla u\nabla v$, где $\nabla u\nabla v = \overset{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{u_{x_1}}\overset{\frac{\partial v}{\partial x_1}}{v_{x_1}}+\dots+\overset{\frac{\partial u}{\partial x_n}}{u_{x_n}}\overset{\frac{\partial v}{\partial x_n}}{v_{x_n}}$, то по ф. Остроградского Т имеем:

(1) $\int\limits_Q v\Delta u\,dx = \int\limits_{\partial Q} v\frac{\partial u}{\partial n}\,dS - \int\limits_Q \nabla u\nabla v\,dx$, т.к. $\nabla u\cdot n\big|_{\partial Q} = \frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\partial Q}$ ~~(1)~~

Если $u, v\in C^2(Q)\cap C^1(\overline{Q})$, Δu, Δv – интегр-мы по Q, то им. место ф-ла:

$$\int\limits_Q u\Delta v\,dx = \int\limits_{\partial Q} u\frac{\partial v}{\partial n}\,dS - \int\limits_Q \nabla v\nabla u\,dx \quad (2)$$

(1) – (2) – вычитая почленно $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int\limits_Q (v\Delta u - u\Delta v)\,dx = \int\limits_{\partial Q}\left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)ds \quad (3)$$

↵ (2), (3) – ф. ГРИНА

<u>Связь с ур-ем Лапласа</u>, $\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0\right]$

Если $u(x)$, $v(x)$ – гарм. ф-ции $\in C^1(D\cup S)$, им. интегрир. 2ые производные в D, то левая часть (3) $=0$, получаем:

$$\int\limits_{\partial Q}\left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)dS = 0 \quad (4)$$

В фор-ле (1) положив $u=v$ при тех же Т усл-ях $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int\limits_Q u\Delta u\,dx = 0 \Rightarrow$ получаем: $\int\limits_{\partial Q} u\frac{\partial u}{\partial n}\,dS = \int\limits_Q \nabla u\nabla u\,dx$

или $\int\limits_{\partial Q} u\frac{\partial u}{\partial n}\,dS = \int\limits_Q \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx$.

⑧ Уравнение Лапласа. Функция Грина.

Обозн. $\Delta = \sum_{i=n}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ – оператор Лапласа; $\Delta u = 0$ – УР-Е ЛАПЛАСА.

Опр.: Ф-ей Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в обл-ти D называется ф-я $G(x,\xi)$ двух точек x и $\xi \in D \cup S$, обладающая свойствами:

$$E(x,y) = \begin{cases} -\log|x-y|, & n=2, \\ -\frac{1}{(n-2)|x-y|^{n-2}}, & n>2. \end{cases}$$

1) $G(x,\xi) = E(x,\xi) + g(x,\xi)$, где E – элементарн. реш-е ур-я Лапласа, $g(x,\xi)$ – гарм. ф-я как по $x \in D$, так и по $\xi \in D$;

2) когда точка x или ξ лежит на гр-це S обл-ти D, то $G(x,\xi) = 0$. $\left[g(x,\xi)\big|_S = -E(x,\xi)\big|_S \right]$

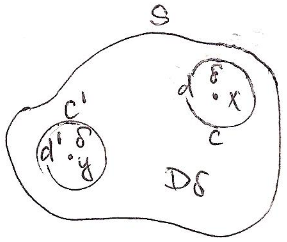
Свойства ф. Грина:

+ 1) $G(x,\xi) \geq 0$ всюду в D

▷ Обозн. $D\delta \subset D$, $D\delta$ – вне шара $|y-\xi| \leq \delta$, $\xi \in D$, δ – дост. мало. $\lim_{x \to \xi} G(x,\xi) = +\infty$ ⇒ при дост. малом δ: $\underbrace{G(x,\xi) > 0 \text{ при } |x-\xi| < \delta}_{(1)}$ ⇒ ⇒ на гр-це обл-ти $D\delta$: $G(x,\xi) \geq 0$ ⇒ {в силу принципа экстремума} ⇒ $\underbrace{G(x,\xi) \geq 0, \forall x \in D\delta}_{(2)}$. (1), (2) ⇒ $G(x,\xi) \geq 0$, $\forall x \in D \cup S$.

+ 2) Функция Грина $G(x,y)$ симметрична относительно т. x и y.

▷ Удалим из обл-ти D замкн. шары $|z-x| \leq \delta$ и $|z-y| \leq \delta$, дост. малого радиуса, вместе с т. x и y. Оставшееся обозн. $D\delta$.



$v(z) = G(z,y)$ – гарм-на в $D \setminus d'$,

$u(z) = G(z,x)$ – гарм-на в $D \setminus d$

$D\delta$ – область гармоничности G

По ф. Грина ⇒

$$\Rightarrow \int_S \left[v(y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} - u(y) \frac{\partial v(y)}{\partial n_y} \right] dS_y = 0$$

применяем ф-лу ↑ для области $D\delta$ ⇒

$$\Rightarrow \int_S \left[G(z,y) \frac{\partial G(z,x)}{\partial n_z} - G(z,x) \frac{\partial G(z,y)}{\partial n_z} \right] dS_z = \left(\int_C + \int_{C'} \right) \left[G(x,y) \frac{\partial G(z,x)}{\partial n_z} - G(z,x) \frac{\partial G(z,y)}{\partial n_z} \right] dS_z,$$

где n_z – внешняя нормаль в т. z на S и на сферах $C: |z-x| = \delta$, $C': |z-y| = \delta$.

$G(z,x) = G(z,y) = 0,\ z \in S$ => перепишем ↑ в виде:

$$\left.\begin{aligned}&\int_C \left[G(z,y)\frac{\partial G(z,x)}{\partial n_z} - G(z,x)\frac{\partial G(z,y)}{\partial n_z} \right] dS_z = \\ &\qquad = \int_{C'} \left[G(z,x)\frac{\partial G(z,y)}{\partial n_z} - G(z,y)\frac{\partial G(z,x)}{\partial n_z} \right] dS_z \\ &G(z,x) = E(z,x) + g(z,x),\ G(z,y) = E(z,y) + g(z,y), \\ &\text{где } g(z,x) \text{ и } g(z,y) \text{ - гарм. ф-ции}\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow G(x,y) = G(y,x)$ при $\delta \to 0$ ◁

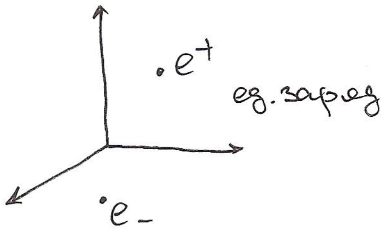
3) При известной ф-ции Грина решение задачи Дирихле о нахождении гарм. в D ф-ции $u(x)$, непр. в $D \cup S$, удовл. гр. условию $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = \varphi(x_0),\ x_0 \in S,\ x \in D$, может быть найдено из

$u(x) = -\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial n_\xi}\varphi(\xi)\,dS_\xi$, где φ - заданная действ. непр. ф-я,

$\omega_n = \frac{1}{\Gamma(n/2)} 2\pi^{n/2}$ - площадь единичной сферы в E_n,

Γ - гамма-функция Эйлера.

Физическая интерпретация функции источника



$$G(x,y) = \frac{e_+}{(n-2)\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}} + \frac{e_-}{(n-2)\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 + (x_i + y_i)^2}}$$

Функция источника для ед. сферы: $G(x,y) = E(x,y) - E(|x|y, \frac{x}{|x|})$

$$\left| |x|y - \frac{x}{|x|} \right| = \left[|x|^2|y|^2 - 2xy + 1 \right]^{1/2} = \left| |y|x - \frac{y}{|y|} \right| = |y|\left| x - \frac{y}{|y|^2} \right| = |x|\left| y - \frac{x}{|x|^2} \right|$$

$\Rightarrow g(x,y) = -E(|x|y, \frac{x}{|x|})$ при $|x| < 1,\ |y| < 1$ - гарм. по x и y.

при $|x| = 1 \vee |y| = 1$: $|y - x| = \left[|x|^2 - 2xy + 1 \right]^{1/2} = \left| |y|x - \frac{y}{|y|} \right| = \left| |x|y - \frac{x}{|x|} \right|$

$\Rightarrow G(x,y)$ ↑ удовлетворяет требованиям ф-ции Грина

По формуле интегрального представления для гармонических ф-й:

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S \left(\underline{G(x,y)}\frac{\partial u(y)}{\partial n} - u(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial n} \right) dy = -\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S u(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial n}\,dS_y$$

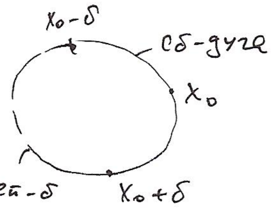
При $|y| = 1$ имеем: $\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y} = -\sum\limits_{i=1}^n \left\{ \frac{y_i(y_i - x_i)}{|y - x|^n} - |x|\frac{y_i\left(|x|y_i - \frac{|x_i}{|x_i|}\right)}{\left(|x|y - \frac{x}{|x|}\right|^n} \right\} =$

$$= -\frac{1 - |x|^2}{|y - x|^n} \Rightarrow u(x) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S u(y)\frac{1 - |x|^2}{|y - x|^n}\,dS_y \Rightarrow \underbrace{u(x) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S u(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial n}\,dS_y}_{\text{ИНТЕГРАЛ ПУАССОНА}}$$

8.3.

Рассм. $n=2$:

$$u(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-|x|^2}{|y-x|^2}f(y)\,d\psi \quad (*)$$



$$1=\frac{1}{2\pi}\int_{C_\delta}\frac{1-x^2}{|y-x|}ds$$

$$\text{Ф } u(x)-f(x_0)=\frac{1}{2\pi}\int_C\frac{1-x^2}{|y-x|}(f(y)-f(x_0))\,ds=\overbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{C_\delta}\frac{1-x^2}{|y-x|}(f(y)-f(x_0))\,ds}^{I_1}+$$

$$+\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{C_{2\pi-\delta}}\frac{1-x^2}{|y-x|}(f(y)-f(x_0))\,ds}_{I_2}$$

Фиксир. $\varepsilon>0$, $\delta(\varepsilon)$: $|I_1|\le\varepsilon/2$, $|I_2|\le\varepsilon/2$ $(x\to x_0)$

$\Rightarrow |u(x)-f(x_0)|<\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}u(x)=f(x_0)$, $|x|<1$, $|x_0|=1$

$\Rightarrow$ ф-ла Пуассона $(*)$ даёт решение задачи Дирихле: $\begin{cases}\Delta u=0\\ u(x)\big|_{x=x_0}=f(x_0)\end{cases}$

Шар радиуса R: $u(x)=\frac{1}{\omega_n R}\int_R\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^{n-2}}u(y)\,dS_y$

⑨. Эллиптические уравнения общего вида. Сопряж. оператор. Формула Грина.

сначала без эл

симм

Лин. дифф. опер-р 2го порядка: $Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}''(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + c(x)u$, (1) D_0

~~$A_{ij}=A_{ji}$, A_{ij}, B_i, C – зад. в $D_0 \subset E_n$ действ. функции.~~

При наличии 1ых непр произв. коэф-тов A_{ij}, можно перейти к виду:

(2) $Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} e_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u$, где $e_i(x) = B_i(x) - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial A_{ij}(x)}{\partial x_j}$, $i=\overline{1,n}$

При наличии 1ых непр произв-ых $e_i(x)$, вводится сопр. оператор:

(3) $\boxed{L^* v} \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(e_i v) + cv$

по опр.

Опр.: Оператор L наз. самосопряжённым, если $Lu = L^* u$, $\forall u \in C^2$, $\forall x \in D_0$

Т: [критерий самосопряжённости]: L – самосопр. $\Leftrightarrow e_i(x) = 0$, $x \in D_0$.

Док-во: $\Leftarrow$ – очевидно (подстановка в (2) и (3)).

$\Rightarrow$ $Lu = L^* u$. Возьмём а) $u=1$, тогда: $\sum_{i=1}^{n} 0 = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial e_i}{\partial x_i}$ (*)

б) $u = x_j$, тогда: $e_j(x) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(e_i x_j) = -x_j \sum \frac{\partial e_i}{\partial x_i} - e_j \Rightarrow$

$\Rightarrow 2e_j(x) + x_j \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial e_i}{\partial x_i}}_{0\,(*)} = 0$, $j=\overline{1,n}$ $\Rightarrow e_j(x) = 0$ $\forall j=\overline{1,n}$, ч.т.д.

($\overset{\Rightarrow}{\text{Крит.}}$ самосопр.: $B_i(x) = \sum_j \frac{\partial A_{ij}(x)}{\partial x_j}$)

расп. $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(v \cdot A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$

$v\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - u\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) + \underbrace{v\sum e_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + u\sum\frac{\partial}{\partial x_i}(e_i v)}_{\sum \frac{\partial}{\partial x_i}(u \cdot e_i v)}$

? $u(x), v(x) \in C^{2,0}(D_0)$, по ф-лам (2), (3) имеем тождество:

$$v Lu - u L^* v = \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[A_{ij}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}v - \frac{\partial v}{\partial x_i}u\right)\right] + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(e_i u v) \quad (*)$$

Пусть $D \subset D_0$. Запишем ф-лу Остроградского-Гаусса для системы ф-й $p_1(x), \dots, p_n(x) \in C^{2,0}(D \cup S)$:

$$\int_D \sum_{i=1}^{n} \boxed{\frac{\partial p_i}{\partial x_i}}\, d\tau_x = \int_S \sum_{i=1}^{n} p_i(y)\cos\widehat{\nu y_i}\, dS_y,$$ ν – ед. внешн. нормаль к $S = \partial D$ в т. $y \in S$

$\int(*)$ + ф-ла Остроградского-Гаусса $\Rightarrow$

{ лин дифф 2 пор-ка; ~~гладкие коэфф~~ } $\Downarrow$

тожд. преобразую $\Rightarrow$ ОГ

$$\Rightarrow \boxed{\int_{D} (vLu - uL^* v)\, d\tau_x = \int_S \left[a\left(v\frac{du}{dN} - u\frac{dv}{dN}\right) + buv\right] dS_y} \text{ – ФОРМУЛА ГРИНА}$$

$D \subset E^n$

где N – ед. вектор – конормаль в т. $y \in S$, напр. косинусы кот.: $\cos\widehat{N y_i} = \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\cos\widehat{\nu y_j}$, $i = \overline{1,n}$

нормаль в базисе сопр. пр-ва

9.2

$$a^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} \cos \widehat{\nu y_i} \right)^2, \quad b = \sum_{i=1}^{n} e_i \cos \widehat{\nu y_i}$$

ЭЛ Элл.

① $a^2 > 0$. Pf: 1) $(\Rightarrow \sum A_{ij} \lambda_i \lambda_j > 0, \ D_0)$

2) ☐ $a^2 = 0 \Rightarrow \sum A_{ij} \cos \widehat{\nu y_j} = 0$ СЛАУ отн cos;

3) $\det A \neq 0$ по полож. опр. форме $\Rightarrow \cos \nu y_j = 0$ прот-е $\Rightarrow a^2 > 0$

с [illegible] $A^{1,n}$:

$\cos \nu x_i = \frac{1}{J} \frac{\partial(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)}{\partial(t_1, \dots, t_{n-1})}$

② $N \cdot \nu = \frac{1}{a} \sum_{i,j} A_{ij} \cos \widehat{\nu y_i} \cos \widehat{\nu y_j}, \ S \ > 0$ по полож. опр. форме

$\Rightarrow$ конормаль не выходит в кас. к S плоскость ни в одной точке S

⑩ Эллиптические уравнения, элементарные решения, потенциалы, принцип экстремума.

лин дифф 2 пор-ка, ∃ $\begin{cases} A_{ij} \in C^3(\overline{D}) \\ B_i, c, f \in C^1(\overline{D}) \end{cases}$

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) u = f(x) \qquad A_{ij} = A_{ji}$$

∃ равном. эллипт ($\exists K_1, K_2 > 0$: $K_1 \sum_i \lambda_i^2 \le Q(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \le K_2 \sum_i \lambda_i^2$) соотв. квадр. форма

$$a_{ij} = \frac{\text{алгебр. дополн-е к эл-ту } A_{ij}(x)}{\det \|A_{ij}\| = A}$$

Введём ф-ю $\sigma(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)(x_i - y_i)(x_j - y_j)$ (>0 квадр. форма)

Введём ф-ю Леви:

$$\Psi(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sigma(x,y)^{\frac{2-n}{2}}}{(n-2)\sqrt{|A(y)|}\,\omega_n}, & n>2, \text{ где } \omega_n \text{ – площадь ед. сферы в } E_n \\ -\dfrac{1}{2\pi\sqrt{|A(y)|}} \ln \sigma, & n=2 \end{cases}$$

Св-ва:
$n=2 \Rightarrow A=I$ без огр. общн.
$n>2 \Rightarrow \inf_{\overline{D}} |A(y)| > 0$ по равном. эл.

~~Когда $A_{ij}=0,\ i\neq j,\ A_{ii}=1,\ i=\overline{1,n} \Rightarrow \sigma(x,y)=|x-y|^2,\ A(y)=1$~~

$A=I \Rightarrow \sigma=|x-y|^2 \Rightarrow$
$\omega_n \Psi(x,y)$ – элементарное решение уравнения Лапласа в пр-ве E_n

$$\omega_n \Psi(x,y) = E(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{n-2}|x-y|^{2-n}, & n>2 \\ -\ln|x-y|, & n=2 \end{cases}$$

?? $(\ )^{\frac{2(2-n)}{n}}$

(выношу 2 из степени под log)

Ф-я $u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_D E(x,y)\mu(y)\,d\tau_y$ наз. ньютоновым потенциалом объёмных масс, распределённых по обл-ти D с пл-тью μ. $\in C^1(\overline{D})$

– рег реш-е ур-я Пуас $\Delta u = -\mu(x)$ [illegible]

Рассм. $n=2 \Rightarrow Lu = \Delta u + \sum_{i=1}^{2} B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x)u = f(x)$

Будем искать $u(x)$ в виде: $u(x) = w(x) - \frac{1}{2\pi}\int_D \ln|x-y|\,\mu(y)\,d\tau_y$

$\Rightarrow \mu(x) + \int_D K(x,y)\mu(y)\,d\tau_y = g(x)$, где $g(x) = Lw(x) - f(x)$,

а $K(x,y) = \frac{1}{2\pi}\left[\sum_{i=1}^{2} B_i(x)\frac{x_i - y_i}{|x-y|^2} + c(x)\ln|x-y|\right]$

L это – интегр. ур-е Фредгольма, ядро которого имеет особенность при $x=y$.

2D ⇒ главная часть $L = \Delta$ без огр. общн.

|Т:| [Принцип экстремума]: ~~Если в области D всюду~~ ① однор лин 2 пор-ка эл $c(x) < 0$, ② $D \Rightarrow$ то ③ регулярное в этой области решение $u(x)$ однородного ур-я $Lu=0$ ни в одной точке $x\in D$ не может достигать ни отрицательного минимума, ни положительного максимума.

Док-во: Пусть $u(x)$ в т. $x\in D$ достиг. отрицат. минимума,

тогда ⌐

$\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0,\ i = \overline{1,n}$; $\sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \lambda_i \lambda_j \geq 0$, где $\lambda_1 \dots \lambda_n$ – ∀ действ. параметры

предст. $A>0$ в точке

$\sum\limits_{i,j=1}^{n} A_{ij} \lambda_i \lambda_j = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} g_{ki} \lambda_i \right)^2 \Rightarrow A_{ij} = \sum\limits_{s=1}^{n} g_{si} g_{sj},\ i,j = 1 \dots n$

$\Rightarrow \sum\limits_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum\limits_{i,j,s=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} g_{si} g_{sj} \geq 0 \Rightarrow \{u(x) < 0\} \Rightarrow \Delta u > 0$ ✗✗ реш-е $\Delta u = 0$

ч.т.д.

$\Rightarrow$! реш-е зад. Дир для $Lu = f$ (?)

(док-во) p 139 Биц

$\boxed{18}$ Вар. методы. Принцип Дир.

Было:

1 кр. зад./Дирихле для $\Delta u=0$: найти ф-ю u, $\begin{cases} \text{- гарм. в } G \\ \text{- удовл. кр. усл. } u(x,y)=\varphi(x,y),\ S \end{cases}$

1 вар. задача для инт. Дир.: найти такое u, что

1) явл. допустимой:
   - $C(G\cup S)$
   - $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ кус.-непр. в G
   - $\exists$ инт. Дир.:

$\Delta u=0$ — ур-е Э-Л для $\boxed{\text{инт. Дир. } D(u)=\int\limits_G (u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy}$

(пот. энергия мембраны в полож. изгиба)

   - удовл. кр. усл. с $\varphi\in C$

2) $D(u)\underset{\text{среди доп.}}{\longrightarrow}\min$

(ничего не говорится о вторых произв.)

$\boxed{T}$ Принцип Дирихле: Класс допуст. ф-й не пуст $\Rightarrow$ (зад. Дир. $\Leftrightarrow$ 1 вар. зад.)

В физической задаче от искомой формы $u=u(x,y)$ мембраны, находящейся в равновесном состоянии изгиба, требуется, ~~чтобы функция $u(x,y)$ принадлежала классу допустимых функций и в этом классе она минимизировала интеграл Дирихле. Задача отыскания среди допустимых функций той функции, для которой интеграл Дирихле минимален, называется первой вариационной задачей. Следует подчеркнуть, что в постановке первой вариационной задачи ничего не говорится о вторых производных искомой функции.~~

~~Имеет место следующее важное утверждение: если заданная на S функция $\varphi(x,y)$ такова, что класс допустимых функций не является пустым, то задача Дирихле и первая вариационная задача эквивалентны.~~

~~Справедливость этого утверждения мы покажем при дополнительных предположениях, о которых речь пойдет ниже.~~

Пусть $u(x,y)$ – решение первой вариационной задачи.
Р-ние зад Дир
Класс допустимых функций представим в виде $u(x,y)+\varepsilon h(x,y)$, где ε - произвольная постоянная, а $h(x,y)$ – произвольная функция из класса допустимых функций, удовлетворяющая
однор.
краевому условию

$$h(x,y)=0, \quad (x,y)\in S. \tag{42}$$

Очевидно, что $\int_G (u+\varepsilon h)_x^2+(u+\varepsilon h)_y^2\,dxdy$

$$D(u+\varepsilon h)=D(u)+2\varepsilon D(u,h)+\varepsilon^2 D(h)\geq 0, \tag{43}$$

где

$$D(u,h)=\int_G (u_x h_x+u_y h_y)\,dxdy. \tag{44}$$

Так как $u(x,y)$ – минимизирующая функция и ε – произвольная постоянная, то из (43) получаем

$$D(u,h)=0. \tag{45}$$

Примем следующие дополнительные предположения: функции $u(x,y)$, $h(x,y)$ и контур S области G являются настолько гладкими, что для них имеют место тождества

$$u_x h_x + u_y h_y = (u_x h)_x + (u_y h)_y - h\Delta u,$$

$$D(u,h) = \overset{\text{что}}{\int_S} h\frac{\partial u}{\partial \nu}\, ds - \int_G h\Delta u\, dxdy, \qquad (46)$$

где ν внешняя к S нормаль.

В силу (42) и (45) из (46) имеем

$$\int_G h\Delta u\, dxdy = 0, \quad \exists \Delta u \in C(G), \; h(x,y) \text{ произв} \Rightarrow \Delta u = 0$$

~~откуда при предположении, что Δu является непрерывной функцией в G, в силу произвольности $h(x,y)$ приходим к заключению, что $\Delta u(x,y)=0$~~. Следовательно, при принятых выше допущениях решение первой вариационной задачи является решением задачи Дирихле (39), (4I).

⇐ Пусть теперь $u(x,y)$ — решение задачи Дирихле (39), (4I), а $u(x,y)+\epsilon h(x,y)$, как и выше, - класс допустимых функций, причем для $u(x,y)$ и $h(x,y)$ имеет место формула тождество (46). $\Delta u=0$ $h|_S=0$ Из этой формулы в силу (39) и (42) следует равенство (45) и, стало быть, на основании (43) получаем

$$D(u) \le D(u+\epsilon h),$$

а это означает, что функция $u(x,y)$ минимизирует интеграл Дирихле (40), т.е. она является решением первой вариационной задачи.

▲

~~Идея редукции краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа к первой вариационной задаче для интеграла Дирихле принадлежит Риману. Приведенное выше утверждение об эквивалентности этих двух задач известно под названием принципа Дирихле.~~

Контр Далеко не всегда имеет место эквивалентность между задачей Дирихле (39), (4I) и первой вариационной задачей. На простых примерах убеждаемся в том, что задача Дирихле (39), (4I) может иметь и притом единственное решение $u(x,y)$, в то время как $u(x,y)$ не только не минимизирует интеграл Дирихле $D(u)$, но этот последний даже расходится.

Пусть G – единичный круг $|z|^2 = x^2+y^2 < 1$, а в краевом условии (41)

$$u(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 < \vartheta < \pi \\ 0 & \pi < \vartheta < 2\pi \end{cases}, \qquad (47)$$

где $x+iy = e^{i\vartheta}$ – точка окружности $|z| = 1$.

Решением задачи (39),(47), очевидно, является функция

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \log i \frac{1+z}{1-z} , \quad z = x+iy ,$$

где под $\log i \frac{1+z}{1-z}$ понимается ветвь этой функции, равная $\frac{\pi}{2}$ при $z=0$.

$$\log' = \frac{1-z}{1+z} \frac{(1-z)+(1+z)}{(1-z)^2}$$

Поскольку

$$\cancel{u_x}^2 + u_y^2 = \frac{1}{\pi^2} \left| \left(\log \frac{1+z}{1-z}\right)' \right|^2 = \frac{4}{\pi} \left| \frac{1}{1-z^2} \right|^2 ,$$

интеграл Дирихле $D(u)$ расходится. (=> u недопустима)

На примере гармонической в круге $|z| < 1$ функции

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(z) \equiv \operatorname{Re} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^{2^{2k}}}{2^k} , \quad z = x+iy, = e^{i\vartheta}$$

принимающей на окружности $|z| = 1$ непрерывные краевые значения

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cos 2^{2k} \vartheta , \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi ,$$

$\boxed{?}$ $u_x = \frac{1}{2^k} 2^{2k} x (2^{2k}-1)$

$G: (0,1)$

убеждаемся в том, что при $0 < r < 1$, $re^{i\vartheta} = z$

$$\int\limits_{|z| \leq r} (u_x^2 + u_y^2)\,dx\,dy = \boxed{?} \int\limits_{|z| \leq r} f'(z) \overline{f'(z)}\,dx\,dy = \boxed{\text{доработать !}}$$

$$= 2\pi \int_0^r \sum_{k=1}^{\infty} 2^{2k} \varrho^{2 2^{2k} - 1}\, d\varrho = \pi \sum_{k=1}^{\infty} r^{2^{2k+1}} \not\to$$

S не гладкая => тоже эквив. не гарант.

(21.) Вариационные методы. Вторая вариационная задача

$$\begin{cases}\Delta u + \lambda u = 0, & (x,y)\in G, \ \lambda = const \\ u(x,y) = 0, & (x,y)\in S\end{cases}$$ ур-е Гельм

краевая

Задача на собственные значения: найти λ, при которых имеются нетривиальные решения.

$D(u,h)=\int(u_x h_x + u_y h_y)dxdy$ $H=\int uh\,dxdy$

инт. Дир.

$$J(u) = \frac{D(u)}{H(u)} \quad \left(, \text{ где } D(u) = \int_G (u_x^2+u_y^2)\,dxdy, \ H(u) = \int_G u^2(x,y)\,dxdy\right)$$

Опр.: Допустимыми для ф-ла $J(u)$ функциями будем считать отличные от постоянной, удовлетворяющие кр. усл-ю, непрерывные в $G\cup S$ действит. ф-ции с кусочно-непр. в G производными первого порядка, для которых инт-л Дирихле д-ен.

① $\neq const$ — новое треб., ост. то же ② $u|_S = 0$ ③ $C(G\cup S)$ ④ $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ кус-непр, G ⑤

Найти допуст. $u(x,y)$: $J(u) \xrightarrow[\text{среди доп.}]{} \min$

Опр.: **Вторая вариационная задача** — ~~это задача нахождения в классе допустимых функций минимума ф-ла $J(u)$ и которой соответствующей минимизирующей функции.~~

$\begin{cases}\text{доп предполож} \\ \exists \text{ реш II вар.зад. } u\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda = J(u) \text{ — min с.зн. кр зад. для ур-я Гельм.} \\ u \text{ — соотв. с.ф.}\end{cases}$

~~Утв.: При определённых дополнительных предположениях при наличии решения второй вариационной задачи, если $u(x,y)$ — минимизирующая ф-я, то $\lambda = J(u)$ есть наименьшим собств. числом задачи на собств. значения, а $u(x,y)$ — соотв. λ собств-функцией.~~

Док-во: ① $u(x,y)$ — мин. ф-я ; $\lambda = J(u) = \frac{D(u)}{H(u)} > 0$

Класс допустимых функций : $u(x,y) + \varepsilon h(x,y)$, $\varepsilon = const$, $h(x,y)$ — допустимая ф-я

$$F(\varepsilon) = \frac{D(u+\varepsilon h)}{H(u+\varepsilon h)} = \frac{D(u) + 2\varepsilon D(u,h) + \varepsilon^2 D(h)}{H(u) + 2\varepsilon H(u,h) + \varepsilon^2 H(h)},$$

где $D(u,h) = \int_G (u_x h_x + u_y h_y)\,dxdy$, $H(u,h) = \int_G uh\,dxdy$

$\Rightarrow$ необх. усл-е экстремума $\Rightarrow F'(0) = 0$, т.е.:

$$F'(0) = 2\,\frac{H(u)D(u,h) - D(u)H(u,h)}{H^2(u)} = 0 \Rightarrow H(u)D(u,h) - D(u)H(u,h) = 0$$

⇒

$\Rightarrow H(u)\,[\mathcal{D}(u,h)-\lambda H(u,h)]=0 \Rightarrow \underset{\int u_x h_x + u_y h_y\,dxdy}{\mathcal{D}(u,h)}-\lambda \underset{\int uh\,dxdy}{H(u,h)}=0$

$\mathcal{D}(u,h) = -\int\limits_G \Delta u h\,dxdy$

([т.к. $\int\limits_G ((u_x h)_x + (u_y h)_y)\,dxdy = \int\limits_G \Delta u h\,dxdy + \overset{\mathcal{D}(u,h)}{\int\limits_G (u_x h_x + u_y h_y)\,dxdy}$

$\overset{\text{or}}{\parallel}$ $\int\limits_S h \frac{\partial u}{\partial \nu}\,dS$, где ν - внешняя нормаль к S

$\overset{\parallel}{0}$, т.к. $h|_S = 0$)

при дополнительных условиях гладкости на ф-ции $u(x,y)$, $h(x,y)$ и контур S области G]

$\Rightarrow \int\limits_G [\Delta u h + \lambda u h]\,dxdy = 0 \Rightarrow$ при дополнительном требовании непрерывности $\Delta u \Rightarrow \underline{\Delta u + \lambda u = 0}$. в виду произв-сти h. $\Rightarrow$ с.ф. задачи, соотв. λ

---

② Пусть λ^* - отличное от 0 собств. значение, u^* - соотв. λ^* собств. ф-я.

$D(u,h) = -\int \Delta u h\,dxdy$ $\quad H(u,h) = \int uh\,dx\,dy$

$\Rightarrow H(\Delta u^* + \lambda^* u^*, u^*) \overset{\text{почему-сколько}}{=} -\mathcal{D}(u^*) + \lambda^* H(u^*) = 0 \Rightarrow \lambda^* = \frac{\mathcal{D}(u^*)}{H(u^*)} \geq \frac{\mathcal{D}(u)}{H(u)} = \lambda$

$\Rightarrow \lambda$ - наименьшее собств. зн-е, ч.т.д.

Пусть λ_1 - наименьшее, u_1 - соотв. λ_1 собств. ф-я $\Rightarrow$

$\Rightarrow Cu_1(x,y)$ - собств. ф-я $\Rightarrow$ без ограничения общности можно считать, что $H(u_1)=1$, $\mathcal{D}(u_1)=\lambda_1 \Rightarrow \lambda_2$ можно найти из

$\min J(u) = J(u_2) = \lambda_2$, $H(u,u_1) \overset{\text{усл-е } \int u u_1 dxdy = 0}{=} 0$ — новая вар. задача для λ_2

Аналогично док-ву ↑ $\Rightarrow \mathcal{D}(u_2,\xi) - \lambda_2 H(u_2,\xi) = 0$, $\forall \xi : \underline{H(\xi,u_1)=0}$

(Роно не верно для $\forall \xi = \eta$.! $\xi(x,y) = \overset{\forall}{\eta}(x,y) - H(\eta,u_1)u_1$ тоже с огр.-нем по выбору

$\Rightarrow \mathcal{D}(u_2,\xi) - \lambda_2 H(u_2,\xi) = 0$ (тоже ξ удовл. усл.) это легко пров

$\xRightarrow{\text{подст. } \xi} \Rightarrow \mathcal{D}(u_2,\eta) - \lambda H(u_2,\eta) = 0$?

Аналогично $\Rightarrow H(\Delta u_2 + \lambda_2 u_2, h) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta u_2 + \lambda u_2 = 0$, ч.т.д.

Аналогично для $\forall n$: $\lambda_n = J(u_n) = \min J(u)$

$H(u)=1$, $H(u,u_i)=0$, $i=\overline{1,n-1}$ $\Rightarrow \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$

$$-\int\left(\Delta u_2 \eta + \Delta u_2 u_1 \int \eta u_1\,dxdy\right)dx\,dy - \lambda_2 \int\left(u_2\eta - u_2 u_1 \int \eta u_1\,dx\,dy\right)dxdy = 0$$

$$\left(\int \eta u_1\,dx\,dy\right)\cdot\left(\lambda_2 \int u_2\,dx\,dy - \Delta u_2 \int u_1 u_2\,dxdy\right)\ ?$$

утв-е нужно?

⑮ Вариационные методы. Метод Ритца.

с привлечением материала ⑳ - ㉑.

В вариационном исчислении имеются методы решения вариационных задач, в которых не используются ур-я в ЧП. Эти методы применительно к задачам для уравнений в ЧП принято называть вариационными или прямыми методами.

Нек. прямые методы строят прибл. реш-е

Метод Ритца: минимизация функционала $\Phi(u)$

$\{V_n\}$, $n=1,2,\ldots$ – полная с-ма допустимых функций (допуск по произв. ч-но)

Составим последовательность $\left\{u_n=\sum\limits_{k=1}^{n} c_k v_k\right\}$, $n=1,2,\ldots$, $c_k=\mathrm{const}$

Определим коэффициенты c_k, $k=\overline{1,n}$, т.ч. выр-е $\varphi_n=\Phi(u_n)$, как ф-я $c_1\ldots c_n$ было минимальным.

$\{u_n(x)\}$ min посл-ть — $\lim J(u_n)=d$

ПРИМЕР: $J(u)=\dfrac{D(u)}{H(u)}$, где $D(u)=\int\limits_G (u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy$

II вар. задача

$H(u)=\int\limits_G u^2(x,y)\,dx\,dy$

$G=\{0<x<\pi,\ 0<y<\pi\}$ и $\underline{H(u)=1}$ — усл-е

В качестве полной системы возьмём $\{\sin kx \sin ly\}$, $k,l=1,2,\ldots$

$$\left\{u_{mn}=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} c_{kl}\sin kx\sin ly\right\},\quad n,m=1,2,\ldots$$

u_{mn} являются допустимыми для функционала $J(u)$

и $d_{mn}=D(u_{mn})=\dfrac{\pi^2}{4}\sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{l=1}^{n} c_{kl}^2(k^2+l^2)$ вычислить

$H(u_{mn})=\dfrac{\pi^2}{4}\sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{l=1}^{n} c_{kl}^2=1$

$\Rightarrow$ надо найти минимум d_{mn} при условии, что $\sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{l=1}^{n} c_{kl}^2=\dfrac{4}{\pi^2}$

$\Rightarrow$ получаем задачу на условный экстремум.

$\Rightarrow$ решая ↑, получаем, что для $\forall \min$: $c_{kl}=0$ при $k\neq 1$ и $l\neq 1$ одновременно и $c_{11}=\dfrac{2}{\pi}$, $d_{mn}=2$.

$\Rightarrow \lim\limits_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} u_{mn}=u(x,y)=\dfrac{2}{\pi}\sin x\sin y$, $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} d_{mn}=D(u)=2=\lambda$

построили реш-е (прибл.) задачи на собств. зн-е: $\begin{cases}\Delta u+\lambda u=0, & \text{в } G\\ u(x,y)=0 & \text{в } S=\partial G\end{cases}$

За решение задачи минимизации $J(u)$ при $H(u)=1$ можно принять функцию $u_n(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{n} c_k v_k(x,y)$, где c_k, $k=1,2,\ldots$ опред-ся из задачи: $\begin{cases} d_n(c_1\ldots c_k)=D(u_n)=\min,\\ h_n(c_1\ldots c_k)=H(u_n)=1.\end{cases}$

$\Rightarrow u_n$ – приближённое решение собственной функции.

$\lambda_n=D(u_n)$ – приближённое собственное значение.

⑯ Метод Бубнова - Галёркина.

с привлечением материала ⑳ - ㉑, ⑮.

Задача на собств. зн-я : $\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 \text{ в } G, \\ u(x,y) = 0 \text{ в } S = \partial G \end{cases}$

$\Rightarrow$ минимизация функционала $J(u) = \frac{\mathcal{D}(u)}{H(u)}$. $(H(u,v) = \int uv\,dv)$

$\mathcal{D}(u) = \int\limits_G (u_x^2 + u_y^2)\,dx\,dy$, $H(v) = \int\limits_G u^2(x,y)\,dx\,dy$, $H(u) = 1$.

$\Rightarrow \{v_n\}$, $n = 1,2,\dots$ – полная система допустимых функций

$\{u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k v_k\}$, $n = 1,2,\dots$, $c_k = \text{const}$

Коэффициенты c_k определяются из равенств:

$H(\Delta u_n + \lambda u_n, v_m) = 0$, $m = \overline{1,n} \Leftrightarrow$ 1) $\sum\limits_{k=1}^{n} H(\Delta v_k + \lambda v_k, v_m)\,c_k = 0$, $m = \overline{1,n}$

$\Rightarrow$ получим однородную СЛАУ, в которой число неизвестных равно числу уравнений. Такая система имеет нетривиальн. решения $\Leftrightarrow$ 2) $\det \begin{bmatrix} H(\Delta v_1 + \lambda v_1, v_1) & \dots & H(\Delta v_n + \lambda v_n, v_1) \\ \vdots & & \vdots \\ H(\Delta v_1 + \lambda v_1, v_n) & \dots & H(\Delta v_n + \lambda v_n, v_n) \end{bmatrix} = 0$

$\Rightarrow$ отсюда находим λ $(=\lambda_n)$

c_k, $k = \overline{1,n}$ – нетривиальные решения системы

$\Rightarrow u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k v_k$ – прибл. с.ф.

(Проще, чем усл. min в Ритце)

⑰ Обобщённые решения задач для уравнений эллиптического типа.

$$Lu = \underline{\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)} + \sum_{i=1}^{n} l_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f(x),\ x \in G,$$

где $G \subset E_n$ – огр. и $S = \partial G$ – $(n-1)$-мерная поверхность

$u(x) = g(x)$, $x \in S$, $g(x)$ – действ. непр. функция

Понятие решения задачи Дирихле будет обобщено для однородного краевого условия $u(x) = 0,\ x \in S$

Опр.: В предположении, что A_{ij}, l_i, c – ограниченные измеримые функции и $f \in L_2(G)$, под обобщённым решением в пр-ве $\overset{\circ}{W}{}_2^1$ задачи $Lu = f$, $x \in G$, $u(x) = 0,\ x \in S$ понимается функция $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$, для которой имеет место тождество:

$$\int_G \left(-\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} l_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v + cuv - fv\right) dx = 0,\ \forall x \in \overset{\circ}{W}{}_2^1,$$

причём под $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ понимаются обобщённые производные ф-ции $u(x)$ первого порядка.

[Говорят, что ф-я $v(x)$ явл-ся обобщённой производной порядка m ф-ции $u(x)$, если имеет место тождество:

$$\int_G u D^m \varphi \, dx = (-1)^m \int_G v \varphi \, dx$$ для $\forall \varphi$ – финитной, с компактн. носителем в G]

Если обобщ. реш-е $u(x) \in C^{2,0}(G)$, и ф-ции A_{ij} – дост. гладкие, то тождество из определения можно переписать в виде:

$$\int_G (Lu - f) v \, dx = 0.$$ $\Rightarrow$ {требуя непр-ть Lu и f} $\Rightarrow$ что $u(x)$ явл-ся классическим решением задачи

Пусть $\exists L^* = L^* w = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_j}\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(l_i w) + cw$.

Опр.: Обобщ. решением сопряжённого уравнения $L^* w = 0$, $w(x) = 0$, $x \in S$ наз. ф-я $w(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$, т.ч.:

$$\int_G \left(-\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(l_i w) v + cwv\right) dx = 0$$ для $\forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$.

Задача $L^* w = 0$, $w(x) = 0$ при $x \in S$ наз. сопряжённой с задачей $Lu = f$, $u(x) = 0$ при $x \in S$.

Аналогично: обобщ. реш-е $w(x)$ из $C^{2p}(G)$ является классическим решением.

$\boxed{\text{Утв.1}}$ Однородная задача Дирихле для однородного уравнения $Lu=0$ и сопряжённая с ней задача имеют одинаковое, не более, чем конечное число ЛНЗ решений.

$\boxed{\text{Утв.2}}$ Для разрешимости задачи $Lu=f$, $u(x)=0$, $x\in S$ необх. и дост-но, чтобы ф-я $f(x)$ удовлетворяла условиям:

$\int\limits_G f w_i\, dx = 0$, где w_i, $i=\overline{1,l}$ – все ЛНЗ реш-я сопряж. задачи

$\boxed{\text{Утв.3}}$ В области достаточно малой меры однородная задача $Lu=0$, $u(x)=0$, $x\in S$, имеет только тривиальное решение.

$\boxed{\text{Т:}}$ Задача $Lu=f$ в G, $u(x)=0$, $x\in S$ разрешима для $\forall f$ и, притом, однозначно $\Leftrightarrow$ соответствующая ей однородная задача $Lu=0$ в G, $u(x)=0$, $x\in S$ не имеет нетривиальных решений.

[из $\boxed{\text{Т}}$ ↑ и $\boxed{\text{Утв.3}}$ ↑ $\Rightarrow$ в области достаточно малой меры $\exists!$ решение].

ПРИМЕР: $u(x,0)=0$, $x\in G$, $\Delta u=-f(x)$, $f\in L_2$

$\int\limits_G fv\, dx = F(v) = \{\text{т. Рисса}\} \overset{\exists u,\ \text{т.что}}{=} (u,v) := \int\limits_G \nabla u \nabla v\, dx$, $\forall v$

$\Rightarrow \exists$ обобщённое реш-е $u(x)$: $\int\limits_G (\nabla u\nabla v - fv)\, dx = 0$

Если $f(x)\equiv 0 \Rightarrow u_0$ – обобщённое решение, т.что $\int\limits_G (\nabla u_0)^2 dx = 0$

$\Rightarrow u_0(x) \overset{\text{п.в.}}{\equiv} 0$ в G $\Rightarrow$ имеет место единственность.

Опр.: Оператор L для уравнения второго порядка

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + C(\ )u = f(x),$$

по опред-ю, обладает свойством равномерной эллиптичности, если для соотв. ему квадратичной формы

$Q(\lambda_1 \ldots \lambda_n) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j$ $\exists\, K_0, K_1 > 0$, т.ч.:

$$K_0\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 \le Q(\lambda_1\ldots\lambda_n) \le K_1\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2.$$

⑱ Обобщённые решения классических задач для уравнений гиперболического типа.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mathcal{L}u = f(x,t), \text{ где } \mathcal{L}u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[A_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right] + \sum_{i=1}^{n} l_i(x,t)\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u$$

$\mathcal{L}$ – равномерно эллиптический в $\Omega \subset E_{n+1}$

$G \subset E_n$ – огр. обл-ть, $Q = \{G \times (0<t<T)\} \subset \Omega$

$S = \{\partial G \times (0 \le t \le T)\}$, $T = const > 0$

$u(x,0) = \tau(x)$, $\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = D(x)$, $u|_S = 0$.

Опр.: Обобщённым решением данной задачи в пространстве $W_2^1(Q)$ наз. ф-я $u(x,t) \in W_2^1$, удовлетворяющая нач. условиям и тождеству:

$$\int_Q \left(-\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} l_i\frac{\partial u}{\partial x_i}v - cuv\right)dxdt =$$

$$= \int_G D(x)v(x,0)\,dx + \int_Q fv\,dxdt, \quad \forall\, v(x,t) \in \mathring{W}_2^1(Q) \text{ и } v(x,T) = 0.$$

Чтобы тождество имело смысл, достаточно потребовать, чтобы A_{ij}, l, c – ограничены и измеримы, а $f \in L_2(Q)$, $D \in L_2(G)$.

f–C??

При $\tau(x) \equiv 0$ накладываются доп. усл-я относительно гладкости коэффициентов, ф-ции $D(x)$ и гр-цы обл-ти Q для классического решения задачи

[Сначала было другое определение:

$\{f_k(x,t)\}_{k=1,2,\dots}$ – огр. посл-ть, $f_k(x,t) \in L_2(G)$.

$f_k(x,t) \to f(x,t)$ для $\forall$ фиксированного $t \in (0,T)$

Если $\forall k$ задача при $f = f_k$ имеет единственное классическое решение $u_k(x,t) \in L_2(Q)$, и ф-я $u(x,t)$ – предел $\{u_k(x,t)\}$ в $L_2(G)$ при $\forall$ фиксир. $t \in (0,T)$, то эту ф-ю наз. обобщ. реш-ем з-чи]

Рассм. ПРИМЕР:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f(x,t) \text{ в } Q, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ x \in G,\ u|_S = 0 \end{cases}$$

Будем использовать определение через предел послед-ти:

$$E_k^2(t) \overset{(*)}{=} \frac{1}{2}\int_G \left[\left(\frac{\partial u_k}{\partial t}\right)^2 + (\nabla u_k)^2 \right] dx = \int_0^t dt_1 \int_G \frac{\partial u_k(x,t)}{\partial t_1} f_k(x,t_1)\, dx$$

{ Докажем последнее равенство: $u_k(x,0) = u_{k_t}(x,0) = 0$, $x \in G$, $u_k|_S = 0$

$$\frac{\partial^2 u_k(x,t)}{\partial t_1^2} - \Delta u_k(x,t_1) = f_k(x,t) \text{ в } Q \;\Big|\cdot \frac{\partial u_k(x,t)}{\partial t_1} \text{ и инт. по } Q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^t dt_1 \int_G f_k(x,t_1) \frac{\partial u_k(x,t)}{\partial t_1} dx = \int_0^t dt_1 \int_G \Big[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial u_k}{\partial t_1}\right)^2 +$$

$$+ \nabla u_k \nabla \frac{\partial u_k}{\partial t_1} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_k}{\partial t_1}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) dx.$$

Поменяем порядок интегрирования и применим ф-лу Остроградского-Гаусса:

$$\int_0^t dt_1 \int_G f_k(x,t_1) \frac{\partial u_k(x,t_1)}{\partial t_1} dx = \frac{1}{2}\int_G \left[\left(\frac{\partial u_k}{\partial t_1}\right)^2 + (\nabla u_k)^2\right]_{t_1=0}^{t_1=t} dx -$$

$$- \int_0^t dt_1 \int_{\partial G} \frac{\partial u_k}{\partial t_1}\frac{\partial u_k}{\partial N_x} dS_x$$, где N_x - ед. вектор внешней нормали к ∂G в т. x.

Из усл. $\Rightarrow \left.\frac{\partial u_k}{\partial t_1}\right|_{t_1=0} = 0$, $\left.\nabla u_k\right|_{t_1=0} = 0$, $x \in G$ (т.к. $u_k|_{t_1=0} = 0$) и $\int_0^t dt_1 \int_{\partial G} \frac{\partial u_k}{\partial t_1}\frac{\partial u_k}{\partial N_x} dS_x = \int_0^t dt_1 \int_S \frac{\partial u_k}{\partial t_1}\frac{\partial u_k}{\partial N_x} dS_x = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ чтд }

$$\frac{d}{dt}\left[E_k^2(t)\right] = 2E_k(t)\frac{d}{dt}E_k(t) = \int_G \frac{\partial u_k(x,t)}{\partial t} f_k(x,t)\, dx$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow 2E_k \frac{d}{dt}E_k(t) \le \left\|\frac{\partial u_k}{\partial t}\right\| \|f_k\| \\ &\left\|\frac{\partial u_k}{\partial t}\right\| \underset{\text{из }(*)}{\le} \sqrt{2}\, E_k(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{dE_k(t)}{dt} \le \frac{1}{\sqrt{2}}\|f_k\|$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow E_k(t) \le \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^t \|f_k(t_1)\|\, dt_1 \Rightarrow \left\|\frac{\partial u_k}{\partial t}\right\| \le \int_0^t \|f_k(t_1)\|\, dt_1 \\ &2\|u_k\|\frac{d}{dt}\|u_k\| = 2\int_G u_k \frac{\partial u_k}{\partial t} dx \le 2\|u_k\|\left\|\frac{\partial u_k}{\partial t}\right\| \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\|u_k\| \le \int_0^t \|f_k(t_1)\|\, dt_1 \Rightarrow \|u_k\| \le \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} \|f_k(t_2)\|\, dt_2 =$$

$= \int_0^t (t-t_1)\|f_k(t_2)\|\, dt_2 \Rightarrow$ из огр-я $\{f_k\}$ следует огр. $\{u_k\}$ в $L_2(G)$ для $\forall t \in [0,T]$

Т.к. $\{f_k\}$ - сх-ся $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0 : \|f_{N+p} - f_N\| < \varepsilon$, $\forall p > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \|u_{N+p}(x,t) - u_N(x,t)\| \le \frac{\varepsilon}{2}t^2$, $\forall t \in [0,T]$

$\Rightarrow \{u_k\}$ - фунд. $\Rightarrow$ сх-ся в $L_2(G) \Rightarrow \{u_k\} \to u \in L_2(G) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists!$ обобщ. решение.

⑲ Обобщённые решения классических задач для уравнений параболического типа.

$\frac{\partial u}{\partial t} - \mathcal{L}u = f(x,t)$, $\mathcal{L}$ - равн. эллиптич. в $\Omega \subset E_{n+1}$

$G \subset E_n$ - огр. обл-ть, $Q = \{G \times (0<t<T)\} \subset \Omega$, $S = \{\partial G \times (0 \le t \le T)\}$, $T = const > 0$

$u(x,0) = \varphi(x) \in G$, $u(x_0,t) = \Psi(t)$, $(x_0,t) \in S$

Опр.: Под обобщённым решением задачи при $\Psi(t) \equiv 0$ (кр. усл.) в W_2^1 в предположении, что $\varphi \in L_2(Q)$, понимается ф-я $u(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$, т.ч.!

$$\int_Q \Big(-u\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} e_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v - euv\Big)\,dx\,dt =$$

$$= \int_G \varphi v(x,0)\,dx + \int_Q fv\,dx\,dt$$, где $\forall v(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$ и $v(x,T) = 0$

Классическое решение задачи $u(x,t)$ при $\Psi(t) \equiv 0$ также удовлетворяет тождеству.

[аналогично гиперболич. типу, обобщ. реш-е ↑ можно ввести через последовательности]

ПРИМЕР: $\frac{\partial u_k}{\partial t} - \Delta u_k = f_k(x,t)$, $(x,t) \in Q$

$u_k(x,0) = 0$, $x \in G$; $u_k|_S = 0$ $\qquad S = \partial G$

Пусть $\exists!$ классич. реш-е u_k.

Справедлива оценка: $|u_k(x,t)| \le T M_k$, если $\max\limits_{(x,t)\in Q\cup\partial Q} |f_k(x,t)| \le M_k$

Доказательство оценки:

▷ Пусть $\exists\,(x_0,t_0)$: $u_k(x_0,t_0) > T M_k \Rightarrow$

$\Rightarrow v(x,t) = u_k(x,t) + M_k(T-t)$ достигает макс. в $Q \cup \partial Q \Leftarrow$ ✗ с тем, что $\Delta v - \frac{\partial v}{\partial t} = -f_k(x,t) + M_k > 0$. Если $u_k(x,t) < -T M_k \rightarrow$ ✗ ◁.

$\{f_k\}$ - фундаментальна $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0$: $|f_{N+p} - f_N| < \varepsilon$, $\forall p > 0$

$$\left.\begin{aligned} \Big(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\Big)(u_{N+p} - u_N) &= f_{N+p} - f_N \\ u_{N+p}(x,0) - u_N(x,0) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow |u_{N+p} - u_N| \le T\varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow \{u_k\}$ - фундаментальна $\Rightarrow \exists\, u(x,t)$: $\{u_k\} \rightrightarrows u(x,t)$

$u(x,t)$ - обобщ. решение.

⑭ Классическое решение. Метод разделения переменных. Собственные функции и собственные значения.

Опр.: Классическими называются регулярные решения уравнений в частных производных, удовлетворяющие соотв. краевым, начальным, смешанным и т.д. условиям рассматриваемой задачи в обычном смысле, т.е. в каждой точке носителя данных.

Метод разделения переменных

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = \alpha(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta(t)\frac{\partial u}{\partial t} + \gamma(t)u$$

вид гол. ур-я лин., 2 пор-ка

Будем искать решение в виде: $u(x,t) = v(x)w(t)$

$$\Rightarrow w(t)\Big[\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i} + c(x)v\Big] = v(x)\Big[\alpha(t)\frac{d^2 w}{dt^2} +$$

$$+ \beta(t)\frac{dw}{dt} + \gamma(t)w\Big].$$

Для того, чтобы рав-во ↑ выполнялось для $\forall x$ и t в обл-ти задания ур-я, необходимо и достаточно двух равенств:

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i} + [C(x)+\lambda]v = 0$$

$$\alpha(t)\frac{d^2 w}{dt^2} + \beta(t)\frac{dw}{dt} + [\gamma(t)+\lambda]w = 0$$

где $\lambda = \text{const}$ (легко выраж. из обоих частей ур-я при разд. пер.)

⇒ получим ОДУ и уравнение в частных производных, в котором независимых переменных на единицу меньше (?).

ПРИМЕР: Колебания упругой мембраны

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ u(x,y,0) = \varphi(x,y),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = \psi(x,y) \text{ в } G, \\ u(x,y,t) = 0,\ t \geq 0,\ (x,y) \in S = \partial G \end{cases}$$

метод разделения переменных ⇒

$$\begin{cases} \Delta v(x,y) + \lambda v(x,y) = 0 \quad \text{(Гельмгольца)} \\ v(x,y) = 0,\ (x,y) \in S \quad \text{(кр. усл. зад. Дир.)} \end{cases} \quad \text{и} \quad w''(t) + \lambda w(t) = 0, \quad \lambda = \text{const}$$

Зн-е λ, для кот. задача имеет нетрив. решение, наз. собств. зн-ем новой простр. задачи, а $v(x,y)$ — соответствующей λ собств. ф-ей.

если $\Delta v + \lambda v = 0$, то $\Rightarrow$

Имеет место тождество : $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial}{\partial x}\left(v \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \lambda v^2$

$\Rightarrow$ интегрируем и применим ф-лу Остроградского – Гаусса :

$$\int_G (v_x^2 + v_y^2)\,dx\,dy = \cancel{\int_S \underset{\overset{\parallel}{0 \text{ на } S}}{v} \frac{\partial v}{\partial \nu} ds} + \lambda \int_G v^2 dx\,dy = \lambda \int_G v^2 dx\,dy \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lambda > 0$, т.к. $v(x,y) \not\equiv$ const и действ. $\Rightarrow \exists\, \lambda = \mu^2$, где $\mu = \text{const} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow w(t) = c_1 \cos \mu t + c_2 \sin \mu t$, где $c_1, c_2 = \text{const}$ — общее реш-е ОДУ

Достаточно ограничиться $\mu > 0$; Теперь подкл. нач. усл-я.

$\Rightarrow u_n(x,y,t) = v_n(x,y)(a_n \cos \mu_n t + b_n \sin \mu_n t)$, $n = 1, 2, \ldots$ ($\exists \Rightarrow$ почл. дифф)

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x,y)(a_n \cos \mu_n t + b_n \sin \mu_n t)$$

и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n(x,y) = \varphi(x,y)$; $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n b_n v_n(x,y) = \psi(x,y)$, $(x,y) \in G$ ($\exists\, \varphi, \psi$ дост. гладкие)

$\{v_n\}$ — ЛНЗ и $\int_G v_n v_m \,dx\,dy = 0$ при $\lambda_n \neq \lambda_m$

~~$\Rightarrow$ будем считать, что~~ $\exists \{v_n\}$ — ортонормированная

Р ортог-сть (Бич) !

$$\Rightarrow a_n = \int_G \varphi(x,y) v_n(x,y)\,dx\,dy, \quad b_n = \left[\int_G \psi(x,y) v_n(x,y)\,dx\,dy\right] \frac{1}{\mu_n}.$$

Р ед-сть этого реш-я (р 145)

Круговая мембрана ($x^2+y^2 \le 1$ в плоск.)

$$\underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}}_{\boxed{\Delta v}}+\overset{\lambda}{\boxed{\mu^2}}v=0$$

ур-е Гельм. (метогорм.)
в пол. коорд.

$v=R(r)\Theta(\theta)$

$$\boxed{\begin{cases} r^2R''(r)+rR'(r)+(\mu^2r^2-w)R(r)=0 & (1)\\ \Theta''(\theta)+w\,\Theta(\theta)=0 & (2)\end{cases}}$$

(2) Θ период. с 2π для однозн. v $\overset{?}{\boxed{\Rightarrow}}$ $w=n^2,\ n\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow \Theta = A_n\cos n\theta + B_n \sin n\theta$

(1) $\exists\ \mu r=\zeta$, $R(r)=R\left(\frac{\zeta}{\mu}\right)=J(\zeta) \Rightarrow$

$$\left(\begin{aligned} J'(\zeta)&=\frac{1}{\mu}R'(r)\\ J''(\zeta)&=\frac{1}{\mu}\left(R'\left(\frac{\zeta}{\mu}\right)\right)'_\zeta=\frac{1}{\mu^2}R''(r)\end{aligned}\right)$$

$$\begin{cases} J''(\zeta)+\frac{1}{\zeta}J'(\zeta)+\left(1-\frac{n^2}{\zeta^2}\right)J(\zeta)=0 \\ v(x,y)|_\Gamma=0 \Rightarrow R(1)=0 \Rightarrow \underline{J_n(\mu)=0}\end{cases}$$

ур-е Бесселя

(для огр. реш-я)

Реш-е: $J_n(\zeta)=\sum\limits_0^{+\infty}(-1)^k\dfrac{\zeta^{n+2k}}{2^{n+2k}\,k!\,(n+k)!}$, $n=\overline{0,1,\ldots}$

(беру из 2 ЛНЗ решений реш-е в круге)

J_n имеет счетн. число корней
∞ — их ! пред. точка

С.ч.: $\mu_{n,m}^2=\zeta_{n,m}^2\neq 0$ — квадраты ненул. корней Бесселя
$(\mu_{n,m}<\mu_{n,m+1})$

С.ф.: $J_n(\mu_{n,m}r)\cos n\theta$, $J_n(\mu_{n,m}r)\sin n\theta$ — реш-е однор. зад. Дир.
$(\Rightarrow \mu_{0,m}^2$ простые; $\mu_{n>0,m}^2$ с кратн. $\geq 2)$

(при этом неоднор. зад. Дир. не всегда разрешима)

[23] Св-ва с.ф., с.зн. $\Delta u + \lambda \rho u = 0$, $\left[\begin{array}{l} D \subset \mathbb{R}^2 \\ D \subset \mathbb{R}^3 \end{array}\right.$ $u|_S = 0$

∃ с.ф., с.зн. Δ в зад. Дир. (<=> ∃ реш-е ШЛ) — из теории интуров

1) Беск. счетное мн-во с.зн.

2) $\lambda_n > 0$ (Кроме: Нейман — min с.зн = 0
3 рода — м.б. кон. число с.зн < 0)
$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + h u|_S = 0\right)$

3) С.ф. ортог. в D с весом $\rho(M)$: $\int\limits_D u_n u_m \rho \, dV = 0$

㉒ Разрывные решения в уравнениях газовой динамики.

Законы сохранения на разрыве.

неразр, как в Навье-Стокса, но ⓵D

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 & \text{— уравнение неразрывности} \\ \rho\frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 & \text{— уравнение движения} \\ \rho\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon + \frac{v^2}{2}) + \rho v \frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon + \frac{v^2}{2}) + \frac{\partial}{\partial x}(pv) = 0 & \text{— уравнение сост-я газа} \end{cases}$$

= тоже, но без $\mu\Delta v$

из ур-я движ.

$$((1)\cdot v) + (2) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v^2) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad \left(v\frac{\partial}{\partial x}(\rho v) + \rho v\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\rho v^2)\right)$$

$$((1)\cdot(\varepsilon + \frac{v^2}{2})) + (3) \Rightarrow (\varepsilon + \frac{v^2}{2})\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\varepsilon + \frac{v^2}{2})\frac{\partial}{\partial x}(\rho v) + \rho\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon + \frac{v^2}{2}) +$$

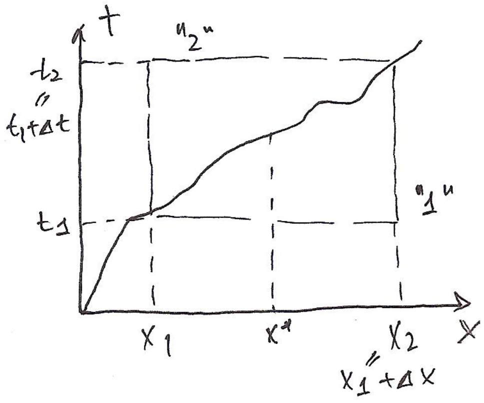
$$+ \rho v \frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon + \frac{v^2}{2}) + \frac{\partial}{\partial x}(pv) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}((\varepsilon + \frac{v^2}{2})\rho) + \frac{\partial}{\partial x}((\varepsilon + \frac{v^2}{2})\rho v + pv) = 0$$

Проинтегрируем от x_1 до x_2, от t_1 до t_2:

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho\Big|_{t_1}^{t_2} dx + \int_{t_1}^{t_2} \rho v\Big|_{x_1}^{x_2} dt = 0 \ ; \quad \int_{x_1}^{x_2} \rho v\Big|_{t_1}^{t_2} dx + \int_{t_1}^{t_2} (\rho v^2 + p)\Big|_{x_1}^{x_2} dt = 0$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(\varepsilon + \frac{v^2}{2})\Big|_{t_1}^{t_2} dx + \int_{t_1}^{t_2} (\rho v(\varepsilon + \frac{v^2}{2}) + pv\Big|_{x_1}^{x_2}) dt = 0$$



? Какие условиея должны удовлетворять функции справа и слева от разрыва?

При $\Delta t, \Delta x \to 0$ контур стянется в точку:

$$\int_{x_1}^{x_2} [\rho|_{t_2} - \rho|_{t_1}] dx = -\int_{t_1}^{t_2} [(\rho v)|_{x_2} - (\rho v)|_{x_1}] dt \overset{(*)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} [\rho_{\substack{t_2 \\ x = x^*}} - \rho_{\substack{t_1 \\ x = x^{**}}}] \frac{\Delta x}{\Delta t} = -(\rho v)_{\substack{x_2 \\ t_1^*}} + (\rho v)_{\substack{x_1 \\ t_2^{**}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \Delta x \to 0 \\ \Delta t \to 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow (\rho_2 - \rho_1)\overset{\lim \frac{\Delta x}{\Delta t},\ V_{\text{движ. разр}}}{U} = -(\rho v)_2 + (\rho v)_1$$ ⇒ перейдём в с-му коорд-т, связанную с разрывом: $u_1 = U - v_1$, $u_2 = U - v_2$ $\Rightarrow \boxed{\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2}$

Аналогично, из 2ух других уравнений $\Rightarrow \boxed{p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2}$

$$\boxed{\cancel{\rho_1 u_1}(\varepsilon_1 + \underbrace{\frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1}}_{w,\ \text{потенциал}}) = \cancel{\rho_2 u_2}(\underbrace{\varepsilon_2}_{\text{внутр. энергия ед. объема}} + \frac{u_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2})}$$

ЗС на разр.

~~$U = \lim \frac{\Delta x}{\Delta t}$ — скорость движения разрыва~~

㉓ Условия Гюгонио. Ударные волны. ~~[illegible] (22)~~.

~~Законы сохранения на разрыве~~:

~~$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$~~

~~$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2$~~ потенциал

~~$w_1 + \frac{u_1^2}{2} = w_2 + \frac{u_2^2}{2}$, где $W = \varepsilon + \frac{p}{\rho}$~~

~~внутр. энергия~~ ед. объёма

полная энергия единичного объёма

$E = \frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon$

$$\left(\begin{matrix}\rho u\left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right)\\ \frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon + \frac{p}{\rho}\end{matrix}\right) \quad (?)$$

$$\left(\begin{cases} \text{ур-я: } \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(p + \rho v^2) & (1)\cdot v + (2)\\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 & (1)\\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho v\left(\frac{v^2}{2} + \overset{\varepsilon + \frac{p}{\rho}}{W}\right)\right] & (1)\cdot\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right) + (3) \end{cases}\right)$$

Процесс адиабатический ⇒ нет потока тепла $(dQ = 0)$.

$$dQ = d\varepsilon + p\,d\tau \Rightarrow d\varepsilon = -p\,\overset{\text{изменение объёма}}{d\tau} = -p\,d\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{p}{\rho^2}\,d\rho$$

$$\Rightarrow d(\rho\varepsilon) = \varepsilon\,d\rho + \rho\,d\varepsilon = \varepsilon\,d\rho + \frac{p}{\rho}\,d\rho = w\,d\rho$$

$p = R\rho T$, $\varepsilon = C_v T$ p/ρ ρ? C_v? R? Что за законы (?)

$$W = C_p T \overset{?}{=} \frac{C_p}{C_p - C_v}\overset{p/\rho}{RT} \overset{\{\gamma\}}{=} \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} \Rightarrow W = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho}, \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v}\left(= \frac{C_p/C_v}{\frac{C_p - C_v}{C_v}}\right)$$

$$\boxed{\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)p_2 + (\gamma-1)p_1}{(\gamma-1)p_2 + (\gamma+1)p_1}, \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{(\gamma+1)\rho_2 - (\gamma-1)\rho_1}{(\gamma+1)\rho_1 - (\gamma-1)\rho_2}}$$

(вывод?)

Гюгонио (предположительно)

(например, для двухатомного газа, $\gamma = 7/5$)

Если мощный взрыв: $p_2 \gg p_1$

$$\Rightarrow \overset{(1)}{\rho_2} = \rho_1 \frac{\gamma + 1 + \overbrace{(\gamma-1)\frac{p_1}{p_2}}^{\sim 0}}{\gamma - 1 + \underbrace{(\gamma+1)\frac{p_1}{p_2}}_{\sim 0}} \Rightarrow \rho_2 = \rho_1 \frac{\gamma+1}{\gamma-1} = \rho_1 \cdot 6 \quad \frac{12/5}{2/5}$$

← уплотнение

↑ напр.

$$\Rightarrow u_1 = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}\frac{p_2}{\rho_1}}, \quad u_2 = \sqrt{\frac{(\gamma-1)^2}{2(\gamma+1)}\frac{p_1}{\rho_2}}$$

← не поддаются измерению, можно только посчитать.

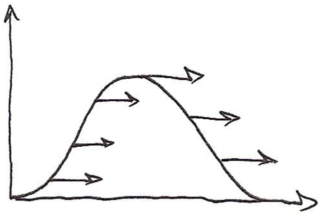
(?) откуда

Если газ покоится $\Rightarrow v_1 = 0 \Rightarrow U = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}\frac{p_1}{\rho_2}}$.

(24.) Нелинейные уравнения. Решение типа бегущей волны. Уравнение Кортвега де Фриса и sin Гордона.

Опр.: Если в $Lu = \sum_{k=0}^{m} \sum_{i_1 \dots i_n} A^k_{i_1 \dots i_n} \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} = f(x)$ $A^k_{i_1 \dots i_n}$ зависят не только от $x = (x_1 \dots x_n)$ [а, например, ещё и от u], то ур-е ↑ наз. нелинейным.

$u(x,t) = f(x - vt) \equiv$ решение типа "бегущая волна",



Уравнение Кортвега де Фриса

Ф-я $\eta(x,t)$, опис. процесс распр-я длинных волн на поверхности воды приближ-но удовл-ет ур-ю:

$$\boxed{\eta_t + C_0\left(1 + \frac{3}{2h_0}\eta\right)\eta_x + \frac{h_0^2}{6} C_0 \eta_{xxx} = 0}$$, где h_0 – глубина жидкости,

$C_0 = \sqrt{g h_0}$ – скорость длинных волн на мелкой воде, g – ускор-е свободного падения.

лин. замена пер-ых ↑ $\Rightarrow$ $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$ (1)

└ КАНОНИЧЕСКИЙ ВИД УР-Я КОРТВЕГА ДЕ ФРИСА

[подходит для опис-я волн малой ~~конечной~~ амплитуды в диспергирующих средах]

~~Зависимость ф-ции $u(x,t)$ от координаты будем рассматривать, как для ф-й из класса потенциалов: $u(x,t)$ – рег. ф-я, опред. при действит x и дост. быстро асимптотически обращ-ся в 0 со всеми своими производными~~: это я пишу также(?)

∃u ∀x∈ℝ

$0 = u(\pm\infty, t) = u_x(\pm\infty, t) = u_{xx}(\pm\infty, t) = \dots$ (*) дост. быстро асимптот.

ЧП непр

~~[во все моменты времени t]~~

Замечательное св-во: Наличие у ур-я ↑ бесконечного числа законов сохранения (интегралов движения): Не по пор-ку, просто беск. мн-во

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\,dx = \text{const}, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(x,t)\,dx = \text{const}, \quad I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[u^3 + \frac{1}{2} u_x^2\right] dx = \text{const} \ (?), \ \dots$$

[I₀] – проинтегр. ур-е (1) по простр. пер-ным:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_t\,dx + 6\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} u u_x\,dx}_{=0} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} u_{xxx}\,dx}_{=0 \text{ по } (*)} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty} u\,dx = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\,dx = const}$$

[I₂] – умн. (1) на $2u(x,t)$ и проинтегр. по пространственным переменным:

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2uu_t\,dx + 6\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} 2\left(\frac{u^3}{3}\right)_x dx} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} 2u u_{xxx}\,dx} = 0$$

= 0 по (*)

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x,t)\,dx = 0 \Rightarrow \boxed{I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x,t)\,dx = const}$$

[I₄] – умн. (1) на $(u^2 + 2u_{xx})$ и интегр. (?)

↳ можно построить "изящный" метод точн. реш-я, основанный на обр. задаче рассеяния для одномерн. стационарного ур-я Шредингера:

$$\Psi_{xx} + (\lambda - u(x,t))\Psi = 0,$$ где $u(x,t)$ – потенциал, λ – числ. парам-р.

Опр.: Ф-ю $f(x,t)$ наз. быстроубывающей, если

$$\max_{0\le t\le T}\int_{-\infty}^{+\infty}(1+|x|)\,|f(x,t)|\,dx < \infty$$

↑ далее, будем предп-ть, что $u(x,t)$ – быстроуб. потенциал.

Две задачи для ур-я Шредингера ↑:

(1) нахождение λ и нетрив Ψ (задача с. зн.), т.е. ур-е ↑ им. нетрив. решения $\Psi(x,t) \in L_2(R^1)$ [т.е. задача о нахожд. собств. зн-й (квантовомеханич. уровней энергии) т. наз. связанных состояний, определяемых нормир. в $L_2(R^1)$ волн. ф-ями $\Psi(x,t)$]

└ реш-е задачи имеется при $\lambda < 0$.

асимптотика: $\boxed{\Psi_m(x,t) \xrightarrow[x\to+\infty]{} C_m(t)\,e^{-\chi_m x}}$, где

$\lambda_m = -\chi_m^2$ – собств. зн-е, $\Psi_m(x,t)$ собств. функции,

$$C_m(t) = \lim_{x\to\infty}\Psi_m(x,t)\,e^{\chi_m(t)x}$$

(2) нахождение при $\overset{изв.}{\lambda} > 0$ ограниченных решений ур-я
↑ с заданным хар-ром асимпт. поведения:

$$\Psi(x,t) \xrightarrow{x\to+\infty} e^{-ikx} + b(k,t)e^{ikx}$$
$$\Psi(x,t) \xrightarrow{x\to-\infty} a(k,t)e^{-ikx}$$

← $k^2=\lambda$ и ф-ции $a(k,t)$, $b(k,t)$ подлежат опред-ю

[т.е. задача рассеяния плоской волны единичн. амплитуды на потенциале $u(x,t)$, где $a(k,t)$ - коэф-т прохождения, $b(x,t)$ - коэф-т отражения: $|a(k,t)|^2+|b(k,t)|^2=1$].

$\exists\ \lambda, u(x,t)$

ПРЯМАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ≡ найти данные рассеяния $\{\chi_m, \overset{\text{асимпт. }\Psi}{C_m}\}$, $\{a(k,t), b(k,t)\}$ при известн. $u(x,t)$.

ОБР. ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ≡ vice versa ↑.

└ однозначно разрешима, осн. на реш. интегр. ур-я Гельфанда-Левитана.

≈ аналит. метод реш-я ЗК (в данном сл-е для ур-я Шр.)

Солитонные решения

$$\begin{cases} u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad t>0, \quad -\infty<x<+\infty, \\ u(x,0)=u_0(x) \quad \text{нач.усл.} \end{cases}$$

└ реш-е задачи Коши [с нач. ф-ей $u_0 = -\frac{2}{ch^2 x}$ или подобн.] м. быть получено методом обратной задачи ↑:

$$u(x,t) = -\cancel{\tfrac{1}{2}}\alpha \frac{\cancel{2}}{ch^2\left[\frac{1}{2}\alpha(x-x_0)-\frac{\alpha^3}{2}t\right]} \qquad \left[\alpha=2,\ x_0=0 \text{ для } u_0=-\frac{2}{ch^2x}\right] \quad \left(\Rightarrow -\frac{2}{ch^2(x-4t)}\right)$$

↑ решения такого вида наз. солитонными. Они описывают бегущие волны неизм. формы, им. скорость ∼ амплитуде решения.

Опр.: Солитонами наз. такие решения нелинейных уравнений, которые им. вид бегущих уединённых волн, взаимодействующих таким образом, что после взаим-я они сохраняют неизменной свою форму, получая лишь приращение в фазах [↑ частицеподобные свойства].

$\boxed{\text{Миура}}$ **мКдФ** $u_t \textcircled{+} 6u^{\textcircled{2}}u_x + u_{xxx} = 0$

Преобр-е: $\overset{\text{реш-е КдФ}}{u} = \overset{||}{v_x + v^2}$ — связь законов сохр.

$$P(u) = u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$
$$K(v) = v_t + 6v^2v_x + v_{xxx} = 0$$
$$\Rightarrow P(u) = \left(2v + \frac{\partial}{\partial x}\right)K(v)$$

Преобр-е 2 $u = w + \overset{\text{мало}}{\varepsilon} w_x + \varepsilon^2 w^2$

Ур-е Гарднера $Q(w) = w_t - 6(w + \varepsilon^2 w^2)w_x + w_{xxx} = 0$

$$\Rightarrow P(u) = \left(1 + \varepsilon\frac{\partial}{\partial x} + 2\varepsilon^2 w\right)Q(w)$$

Закон сохр $\overset{\text{для}}{Q(w)}$: $(w)_t + (-3w^2 - 2\varepsilon^2 w^3 + w_{xx})_x = 0$

$w = \sum\limits_0^\infty \varepsilon^j w_j$. Знач-я w_j по преобр 2:

$w_0 = u$
$w_1 = -u_x$
$w_2 = u_{xx} - u^2$

Подст. ряд в нов. зак сохр и прир. одинаковые степ. ε
⇒ новые законы сохр.

$\boxed{29}$ Обр. зад. расс. (прод-е)

КдФ — 1) ур-е совм переопр системы:

$$\begin{cases}(L-k^2)\psi=0, & L=-\frac{d^2}{dx^2}+u(x,t) \text{ оп Ш } \Lambda=\text{Шред}\\ \psi_t+A\psi=0, & A=4\frac{d^3}{dx^3}-3\left(u\frac{d}{dx}-\frac{d}{dx}u\right)\end{cases}$$

2) эквив $L_t=[L,A]=LA-AL$ (предст-е Лакса)

Спектр L с быстроуб. $u(x)$: 1) $k^2>0$ непр камп
2) $\boxed{-p_n^2}$ кон число дискр с зн

Оз хорошт. непр камп, решив $L\psi=k^2\psi$ с асимптотикой ψ (упом. раньше)
$\Rightarrow\ !\psi$ $(\Rightarrow a, b)$

Прямая $u \Rightarrow$ $\underset{(-\infty,\infty)}{b=R(k)}$ p_n, ρ_n — <u>данные расс</u>

Обратная $\xrightarrow[\text{расс}]{\text{данные}}$ u $(\Rightarrow L)$

Метод реш-я: ур-е Гельфанд-Левитан

$$K(x,y)+M(x+y)+\int_x^\infty K(x,z)M(z+y)\,dz=0,\quad y>x$$

интегр Фредг II рода отн K $\forall x$. $\underline{M(x)}=\frac{1}{2\pi}\int b(k)e^{ikx}dx+\sum\rho_n e^{-p_nx}$

$\underline{\rho_n}=\left(\int_{-\infty}^{\infty}f_n^2(x)dx\right)^{-1}$ — нормир. конст $\forall p_n$. (f_n — с.ф.).

$$\Rightarrow K \Rightarrow \underline{u(x)=-2\frac{d}{dx}K(x,x)}$$

Эвол расс для КдФ: $R(k,t)=R(k,0)e^{8ik^3t}$ $\quad p_n(t)=p_n(0)$

$\rho_n(t)=\rho_n(0)e^{8p_n^3t}$

1) Решить прямую зад расс. $u(x,0)\Rightarrow J(0)$
2) $J(0)\Rightarrow J(t)$, исп. ф-лы эвол расс
3) Решить обр. зад.: $J(t)\Rightarrow u(x,t)$

Синус-уравнение Гордона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin u$$

общее сложно

$u = f(x - \lambda t)$

[часто встречается в физике и технике]

[выписать сколько-нибудь общее решение весьма затрудн-но]

Будем искать реш-е в виде: $u = f(x - \lambda t) = f(\xi)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\lambda f'(\xi);\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \lambda^2 f''(\xi);\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(\xi)$$

$$\Rightarrow \lambda^2 f'' = a^2 f'' + \sin f$$

$$(\lambda^2 - a^2) f'' = \sin f \Rightarrow f'' = \frac{\sin f}{\lambda^2 - a^2} \quad \Big| \cdot 2f'$$

$$\Downarrow$$

$$2f'f'' = 2f' \frac{\sin f}{\lambda^2 - a^2}$$

$\downarrow$

интегрируем!

$$(f')^2 = -\frac{2}{\lambda^2 - a^2}(\cos f - C)$$

$$f' = \pm\sqrt{\frac{2}{\lambda^2 - a^2}}\sqrt{-\cos f + C}$$

✓

$$(*) \quad \frac{df}{\sqrt{C - \cos f}} = \pm\sqrt{\frac{2}{\lambda^2 - a^2}}\, d\xi$$

разделяем переменные

Пусть $C = 1$, тогда:

$$\frac{df}{\sqrt{1 - \cos f}} = \frac{df}{\sqrt{2\sin^2 \frac{f}{2}}} = \frac{2\, d\frac{f}{2}}{\sqrt{2}\left|\sin \frac{f}{2}\right|}$$

$\Rightarrow$ ур-е (*) перепишется в виде:

$$\int \frac{df}{\sin f/2} = \pm \frac{2}{\sqrt{\lambda^2 - a^2}}\, \xi + C_1$$

㉕ Вывод уравнения КдВ. (ур-ние мелкой воды и Буссинеска).

Ур-ние Навье-Стокса

~~$\overline{v}=(v_1, v_2, v_3)$~~

~~$\boxed{} = v_1 \frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x} + v_2 \frac{\partial \overline{v}_i}{\partial y} + v_3 \frac{\partial \overline{v}_i}{\partial z}$ — всего 3 уравнения $(i=1,2,3)$~~

$$\begin{cases} \frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + \boxed{(\overline{v}\nabla)\overline{v}} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + f \;\; + \frac{\mu}{\rho}\Delta v \\ \operatorname{div}\overline{v} = 0 \leftarrow \text{ур-ние неразрывности} \Leftarrow \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho v = 0\right) \\ v(r,t)|_{t=0} = v_0(\xi) \;\; \text{нач. усл.} \quad , \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x}\overset{v_1}{\dot{x}} + \frac{\partial \rho}{\partial y}\overset{v_2}{\dot{y}} + \frac{\partial \rho}{\partial z}\overset{v_3}{\dot{z}} \\ \overline{\eta} v|_s = 0, \; v_n|_s = 0 \leftarrow \text{условие непротекания (одн. гран.)} \\ \text{на поверхности}: \; p|_{s^+} = p|_{s^-} \;\; \text{(гран.)} \end{cases}$$

~~$(\overline{v}\nabla) = v_1\frac{\partial}{\partial x} + v_2\frac{\partial}{\partial y} + v_3\frac{\partial}{\partial z}$~~

$\forall$ ур-ние Эйлера: $\frac{d\overline{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + f, \; \operatorname{div}\overline{v} = 0$ — убираем член из Навье-Стокса

$f = -\frac{1}{\rho}\nabla U$ — потенциальная сила

умножим ур-е ↗ на $\rho\overline{v}$ ~~и проинтегрируем~~:

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\rho|\overline{v}|^2\right) + \overline{v}\nabla p + \overline{v}\nabla U = 0$

Считаем, что поле стационарно, т.е. $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\rho|\overline{v}|^2 + U\right) + \frac{dp}{dt} - \frac{\partial p}{\partial t} = 0$?

Энергия: $\varepsilon = \frac{1}{2}\rho|\overline{v}|^2 + U \Rightarrow \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{2}\rho\overline{v}\nabla|\overline{v}|^2 + \overline{v}\nabla p + \overline{v}\nabla U = 0$?

$\{\overline{a}\nabla\varphi = \operatorname{div}(\overline{a}\varphi) - \varphi\operatorname{div}\overline{a}\}$

$\overline{\Pi} = \overline{v}\left(p + \frac{1}{2}\rho|v|^2 + U\right)$ — вектор Умова-Пойтинга

$\Rightarrow \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \operatorname{div}\overline{\Pi}$

Закон сохранения энергии: $\frac{d}{dt}\int\limits_{\tau}\varepsilon\, d\tau + \int\limits_{S}\overline{\Pi}\,\overline{n}\, dS = 0$

1S Г-0

Пусть движение жидкости стационарно:

$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\rho|\overline{v}|^2 + U + p\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\rho|v|^2 + U + p = \text{const}$ — интеграл Бернулли

Пусть движение потенциально: $\overline{v} = \nabla\Phi$, Φ — потенциал скорости

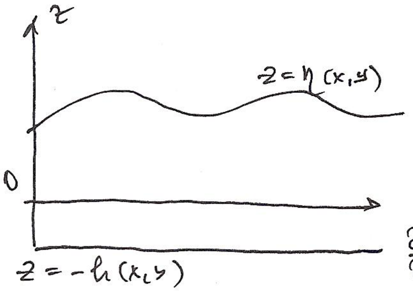
Подставим в уравнение Эйлера: $\nabla\frac{\partial}{\partial t}\Phi + \nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) + (\nabla\Phi\nabla)\nabla\Phi = f$,

$(\nabla\Phi\nabla)\nabla\Phi = \nabla\left(\frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2\right) \Rightarrow \nabla\left[\frac{\partial}{\partial t}\Phi + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + U + \frac{p}{\rho}\right] = 0$ $\quad f = -\frac{1}{\rho}\nabla U$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\Phi + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + U + \frac{p}{\rho} = c(t)$ — интеграл Бернулли — Коши

уравнение неразрывности $\Rightarrow \underbrace{\operatorname{div}\nabla}_{\Delta}\Phi = 0 \Rightarrow \Delta\Phi = 0.$

25.2



$\Delta\Phi = 0$. $\frac{\partial}{\partial t}\Phi + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + gz + p = 0$ – инт-л Бернулли

$\xi = \eta(x,y,t) - z$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\eta + \Phi_x\eta_x + \Phi_y\eta_y - \Phi_z\big|_{z=\eta(x,y,t)} = 0$

$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0$ – усл-е непротекания

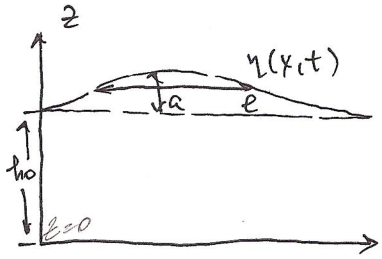
$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + g\eta(x,y,z)\big|_{z=\eta(x,y,t)} = -p_0(x,y,t)$

└ интеграл Бернулли-Коши

нач. скорости: $\Phi|_{t=0} = \Phi_0(x,y,z)$,

$\eta|_{t=0} = \eta_0(x,y)$

Теория мелкой воды: перейдём к одномерному по координате движению



Вводятся безразмерные параметры:

$\alpha = \frac{a}{h_0}$ (в дальнейшем, $\alpha < 1$); $\beta = \frac{h_0^2}{l^2}$, где

a – характеристическая амплитуда волны,
l – длина волны

Безразмерные величины: $\frac{x}{l}$, $\frac{z}{h_0}$, $\frac{t\sqrt{gh_0}}{l}$, $\frac{(\eta - h_0)}{a}$ $\frac{\sqrt{gh_0}}{gla}\Phi$ ↙ обозн. x, z, t, η, Φ

Вместо ур-я Лапласа: $\beta\Phi_{xx} + \Phi_{zz} = 0$, $0 < z < 1 + \alpha\eta$; $\Phi_z|_{z=0} = 0$ ← усл. непротекания

При $z = 1 + \alpha\eta$: $\eta_t + \alpha\Phi_x\eta_x - \frac{1}{\beta}\Phi_z = 0$; $\Phi_t + \eta + \frac{1}{2}\alpha\Phi_x^2 + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\beta}\Phi_z^2 = 0$

$$\Phi = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\beta^m\frac{z^{2m}}{(2m)!}\frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}f(x,t)$$

$$\Rightarrow (*) \begin{cases} \eta_t + \frac{\partial}{\partial x}[(1+\alpha\eta)f_x] - \{\frac{1}{6}(1+\alpha\eta)^3\frac{\partial^4}{\partial x^4}f + \frac{1}{2}\alpha(1+\alpha\eta)^2\eta_x\frac{\partial^3}{\partial x^3}f\}\beta + O(\beta^2) = 0, \\ \eta + f_t + \frac{1}{2}\alpha f_x^2 - \frac{1}{2}(1+\alpha\eta)^2\{\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial t} + \alpha f_x\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} - \alpha f_{xx}^2\}\beta + O(\beta^2) = 0. \end{cases}$$

Считаем, что $0 < \beta \ll 1$ (волна сильно размазана). Опустим члены более высокого порядка: $\eta_t + [(1+\alpha\eta)f_x]_x = 0$

$\eta + f_t + \frac{1}{2}\alpha f_x^2 = 0$

Обозн. $u = f_x + \Phi_x$. Дифф-ем 2ое ур-е по x и возвращаемся к размерным переменным:

$$\left.\begin{array}{l} \eta_t + [(h_0+\eta)u]_x = 0 \\ u_t + uu_x + g\eta_x = 0 \end{array}\right\} \text{УРАВНЕНИЯ МЕЛКОЙ ВОДЫ}$$

Пусть $\alpha \ll 1$, т.е. амплитуда мала $\Rightarrow \eta_t + u_x = 0$
$u_t + \eta_x = 0$ $f_x = u \Rightarrow$

$\Rightarrow \eta_{tt} = c_0^2\eta_{xx}$, где $c_0^2 = gh_0$ – получились обычные волны

Пусть $\alpha = O(\beta)$. Из (*) получим: ↓

25.3.

$$\boxed{\begin{cases} \eta_t + [(1+\alpha\eta)u]_x - \frac{1}{6}\beta u_{xxx} = 0 \\ u_t + \underbrace{2uu_x}_{\text{порождает нелинейную волну}} + \eta_x - \frac{1}{2}\beta u_{xxt} = 0 \end{cases}}$$ – уравнения Буссинеска

└ они описывают волны малой амплитуды на мелкой воде.

Если выделить волны, бегущие только вправо → получим ур-е КдВ:

Ищем реш-е в виде: $u = A_0(\eta) + \alpha A_1(\eta) + \beta B_1(\eta) + O(\alpha^2+\beta^2)$,

а η в виде: $\eta_t + \eta_x = \alpha C_1(\eta) + \beta C_2(\eta) + O(\alpha^2+\beta^2)$ ⇒ подставим в ур-я:

$$\eta_t + [A_0]_x + \alpha[(\eta A_0)_x + (A_1)_x] + \beta[(B_1)_x + \frac{1}{6}(A_0)_{xxx}] + O(\alpha^2+\beta^2) = 0$$
$$[A_0]_t + \eta_x + \alpha[(A_1)_t + A_0(A_0)_x] + \beta[(B_1)_t - \frac{1}{2}(A_0)_{xxt}] + O(\alpha^2+\beta^2) = 0$$

$$\eta_t + \eta_x + \alpha[(A_1)_x + 2\eta\eta_x] + \beta[(B_1)_x - \frac{1}{6}\eta_{xxx}] = 0$$
$$\eta_t + \eta_x + \alpha[(A_1)_t + \eta\eta_x] + \beta[(B_1)_t - \frac{1}{2}\eta_{xxt}] = 0$$

$A_1 = \eta^2\sigma$, $B_1 = \sigma\eta_{xx}$

$\Downarrow \sigma = -\frac{1}{4}$, $\Downarrow \sigma = \frac{1}{6}$

$$\Rightarrow \eta_t + \eta_x + \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x + \frac{1}{6}\beta\eta_{xxx} = 0$$
$$\eta_t + c_0\left(1 + \frac{3}{2}\frac{\eta}{h_0}\right)\eta_x + \frac{1}{6}h_0^2 c_0 \eta_{xxx} = 0$$

в каноническом виде: $\boxed{u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0}$

уравнение KDV.

$\boxed{28}$ Уизем

$$u_t + uu_x + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-s)\,u_s(s,t)\,ds = 0$$

19.03.07

$$\overbrace{u_t+uu_x}^{\text{ур-ние Хопфа}}+\int_{-\infty}^{\infty}K(x-s)u_s(s,t)\,ds=0$$ — <u>ур-ние Уизома</u> (*)

Как представить член, который сохраняет начальную форму решение? Нужно затормозить быстрые части. Можно подобрать ядро так, чтобы получилось КдФ.

Изучим интегралы этого ур-ние. Для этого нужны предположения о ядре:

1) $K(x)=K(-x)$

Обозначим $\hat{K}u=\int_{-\infty}^{\infty}K(x-s)v(s)\,ds$

$(\hat{K}u,v)=(u,\hat{K}v)$ — в силу четности

2) Перестановочность с оператором диф-ние по x:

$$D_x\hat{K}=\hat{K}D_x$$

Запишем ур-ние в виде: $\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u^2}{2}+\hat{K}u\right]=0 \;\Big|\int_{-\infty}^{\infty}dx$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,t)\,dx=-\left[\frac{u^2}{2}+\hat{K}u\right]\Big|_{-\infty}^{+\infty}=0$$

$\Rightarrow$ Первый интеграл $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)\,dx=const=I_1}$

Умножим ур-ние (*) на u и $\int$ $\Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}u^2(x,t)\,dx+\underset{0}{\underline{\int_{-\infty}^{\infty}D_x\left(\frac{u^3}{3}\right)dx}}+\int_{-\infty}^{\infty}uD_x\hat{K}u\,dx=0$$

$$\frac{d}{dt}I_2[u]+(u,D_x\hat{K}u)=0,\quad I_2=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}u^2(x,t)\,dt$$

$$* \ \underline{(u,D_x\hat{K}u)}=\int_{-\infty}^{\infty}uD_x\hat{K}u\,dx=\underset{0}{u\hat{K}u\Big|_{-\infty}^{+\infty}}-\int_{-\infty}^{\infty}D_xu\,\hat{K}u\,dx=$$

$$=-(\hat{K}u,D_xu)=-(u,\hat{K}D_xu)=\underline{(-u,D_x\hat{K}u)}$$

$$\Rightarrow (u,D_x\hat{K}u)=0\Rightarrow\boxed{I_2=const=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}u^2(x,t)\,dt}$$

㉗ Автомодельные решения нелинейных уравнений.

$$u_t = (K(u)u_x)_x$$

? При каких K температура будет неограниченно возрастать?

Будем искать решение типа бегущей волны:

$$u(x,t) = f(x-\lambda t) = f(\xi) \text{ — автомодельное решение}$$

переписали ур-е с F

$$\frac{\partial u}{\partial t} \overset{\text{по опр.}}{=} -\lambda \frac{df}{d\xi}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \overset{\text{по опр.}}{=} \frac{df}{d\xi} \Rightarrow \frac{d}{d\xi}\left(K(f)\frac{df}{d\xi}\right) = -\lambda \frac{df}{d\xi} \qquad | \int$$

$$\Rightarrow K(f)\frac{df}{d\xi} + \lambda f = C$$

] Пусть, для определённости, $C = 0$.

$$\Rightarrow \frac{K(f)}{f}\frac{df}{d\xi} = -\lambda$$

добавим условие финитности решений: $\int_0^1 \frac{K(\eta)}{\eta} d\eta < \infty$

Введём $\Phi(u) = \int_0^u \frac{K(\eta)}{\eta} d\eta$, $u \geq 0$, $\Phi(0) = 0$

$$\Rightarrow \int_{0}^{f(\xi)} ?\, \frac{K(\eta)}{\eta} d\eta = -\lambda(\xi - \cancel{\xi_0}) \Rightarrow \Phi(f(\xi)) = -\lambda(\xi - \cancel{\xi_0}) \Rightarrow f(\xi) = \Phi^{-1}(-\lambda\xi) \quad (\xi_0 = 0).$$

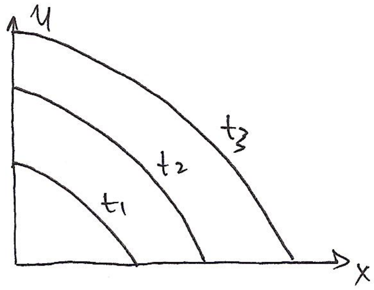
$$\Rightarrow u_{A}(t,x) = \Phi^{-1}[\lambda(\lambda t - x)^*] \quad \{\xi = x - \lambda t\}$$

(обозн. ? $*$: $\Phi \neq 0 \Leftarrow \lambda t - x > 0$; $\Phi = 0 \Leftarrow \lambda t - x < 0$)

1) Пусть $K(u) = K_0 u^\sigma$, $\sigma = \text{const} \Rightarrow \Phi^{-1}(u) = \left(\frac{\sigma}{K_0} u\right)^{1/\sigma}$?

$$\left(\Phi(u) = K_0 \int \eta^{\sigma-1} d\eta = \frac{K_0}{\sigma}\eta^\sigma\Big|_0^u = \frac{K_0 u^\sigma}{\sigma}\right)$$

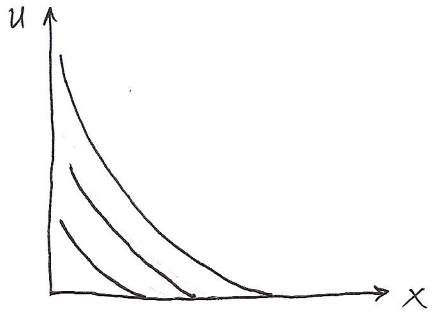
$$\Rightarrow u_A(t,x) = \left[\frac{\sigma}{K_0}\lambda(\lambda t - x)\right]^{1/\sigma}$$



2) Пусть $K(u) = |\ln u|^{-1}$, $x \in (0, 1/2)$, $K(u) > 0$, $K(0) = 0$

$$\int_0^1 \frac{K(\eta)}{\eta} d\eta \leftarrow \text{расх-ся}$$

$$\Phi(u) = \int_0^u \frac{K(\eta)}{\eta} d\eta = \int_0^u \frac{d\eta}{\ln|\eta|\eta}$$



3) Пусть $K(u) = u\exp(-u)$, $u > 0$

$$u_A(t,x) = \begin{cases} -\ln[1 - \lambda(\lambda t - x)], & 0 \leq x \leq \lambda t \\ 0, & x > \lambda t \end{cases}$$

Рассм. $u_t = \nabla(u^\sigma \nabla u)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$

ищем в виде:

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(t,x)dx = E_0, \quad u(t,x) = t^\alpha \theta(\xi), \quad \xi = \frac{x}{t^\beta} \text{ — автомодельное реш-е}$$

$$\nabla\left(t^{\alpha\sigma}\theta^\sigma\left(\frac{x}{t^\beta}\right)\dots\right)$$

$$\text{Подставим} \Rightarrow \alpha t^{\alpha-1}\theta - \beta t^{\alpha-1-\overset{?}{\beta}} \sum_{i=1}^N \frac{\partial\theta}{\partial\xi_i} = t^{\alpha(\sigma+1)-2\beta}\nabla_\xi(\theta^\sigma\nabla_\xi\theta) \quad \boxed{\text{Вывести}}$$

27.2

Можно сократить, если $\alpha - 1 = \alpha(\sigma+1) - 2\beta$?

$\int\limits_{\mathbb{R}^N} u(t,x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} t^{\alpha}\theta(\xi)dx = t^{\alpha+N\beta}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\theta(\xi)d\xi \Rightarrow \alpha+N\beta=0$, чтобы энергия сохранялась

$\Rightarrow \eta^{N-1}\theta^{\sigma}\theta' + \frac{1}{N\sigma+2}\theta\eta^{N} = 0,\ \eta>0,\ \theta^{\sigma}\theta'(0)=0.$

подбирается автомодельная переменная

Рассм. $u_t = (u^{\sigma}u)_x$, $\sigma = const$, $t>0$, $x>0$, $u(0,x) = \overset{\text{нач.}}{u_0}(x)$ $x>0$

$u_0^{\sigma+1}\in C^1(\mathbb{R}_+)$, $u(t,0) = \overset{\text{кр.}}{u_1}(t)$, $t>0$

1) Возьмём степенной граничный режим: $\overset{\text{кр}}{u_1}(t) = (1+t)^m$, $t>0$, $m=const$

Будем искать автомодельное реш-е в виде: $u_A(t,x) = (1+t)^m\theta_A(\xi)$

где $\xi = \frac{x}{(1+t)^{\frac{1+m\sigma}{2}}}$. Сделаем замену : $t\to\frac{t}{\alpha}$, $x\to\frac{x}{\alpha^{\frac{1+m\sigma}{2}}}$, $u\to\alpha^m u$

вывести

$\Rightarrow$ автомодельное уравнение: $\left.\begin{array}{l}(\theta_A^{\sigma}\theta_A')' + \frac{1+m\sigma}{2}\theta_A'\xi - m\theta_A = 0\\ \theta_A(0)=1,\ \theta_A(\infty)=0\end{array}\right\}$ ОДУ

2) Возьмём экспоненциальный граничный режим: $\overset{\text{кр}}{u_1}(t) = e^t$, $t>0$

$u_A(t,x) = e^t f_A(\eta)$, $\eta = \frac{x}{\exp(\frac{\sigma t}{2})}$ $\Rightarrow$ вывести

$\Rightarrow (f_A^{\sigma}f_A')' + \frac{\sigma}{2}f_A'\eta - f_A = 0$, $\eta>0$; $f_A(0)=1$, $f_A(\infty)=0$.

Рассмотрим задачу с внешним источником: $u_t = (u^{\sigma}u_x)_x + u^{\beta}$,

$t>0$, $x\in\mathbb{R}$, $\sigma>0$, $\beta>1$

$u_A(t,x) = (T_0-t)^{\frac{-1}{\beta-1}}\theta_A(\xi)$, $\xi = \frac{x}{(T_0-t)^m}\in\mathbb{R}$, $\theta_A(\xi)\geq 0$

Возьмём $m = [\beta-(\sigma+1)]/[2(\beta-1)]$

Будем считать начальные условие чётными: $u_0(-x) = u_0(x)$, $x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \theta(t,\xi) = (T_0-t)^{1/(\beta-1)}u(t,\xi(T_0-t)^m)$, $t\in[0,T_0]$

$(\theta_A^{\sigma}\theta_A')' - m\theta_A'\xi - \frac{1}{\beta-1}\theta_A = 0$

[важно не т. найти автомодельн. реш-е, но и исслед. устойч-ть]